

# Wozu benötigen Lebensversicherer Reserven?

$q_x$ -Club

am 4. April 2006 in Bonn

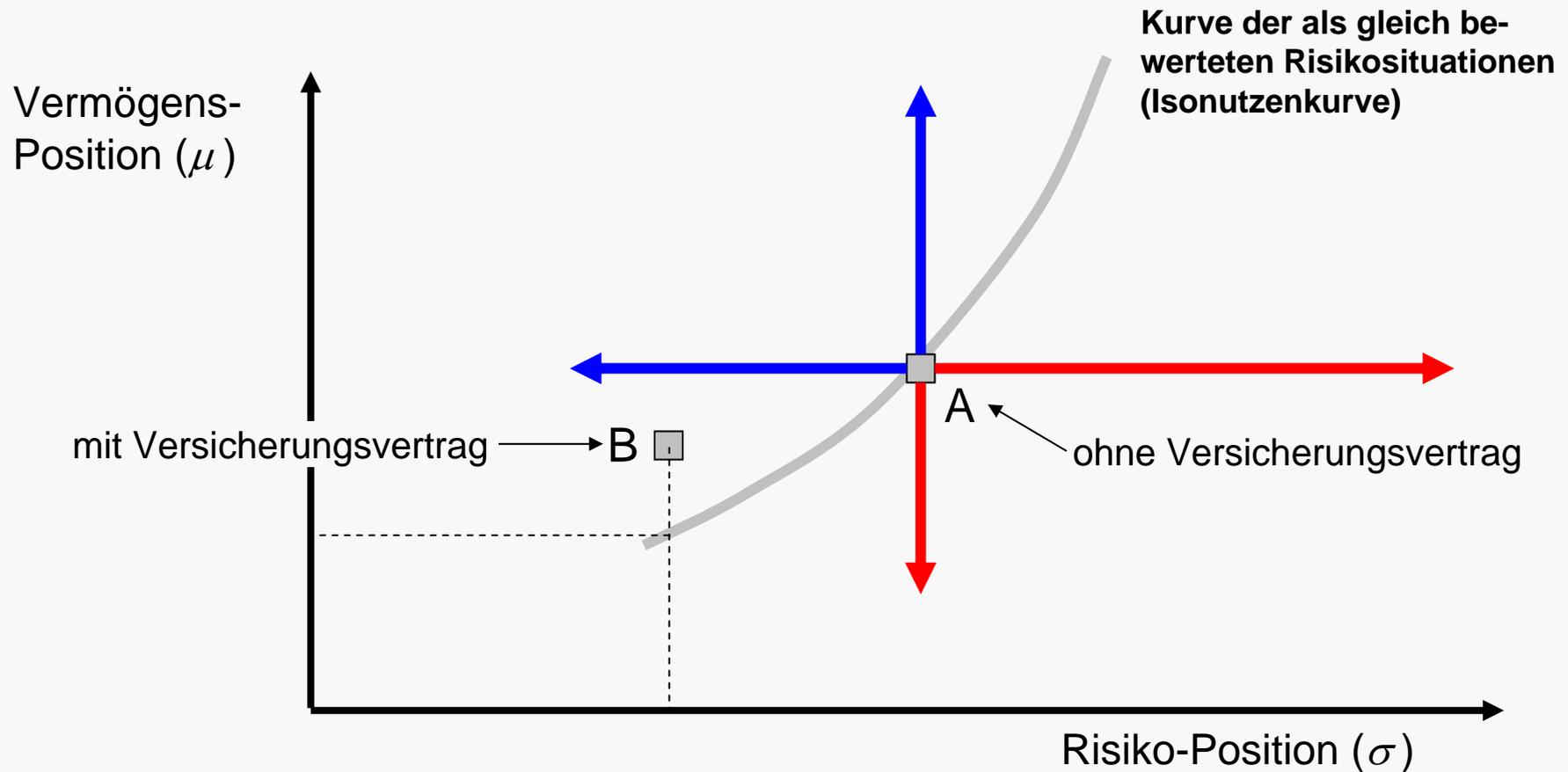


# Überblick

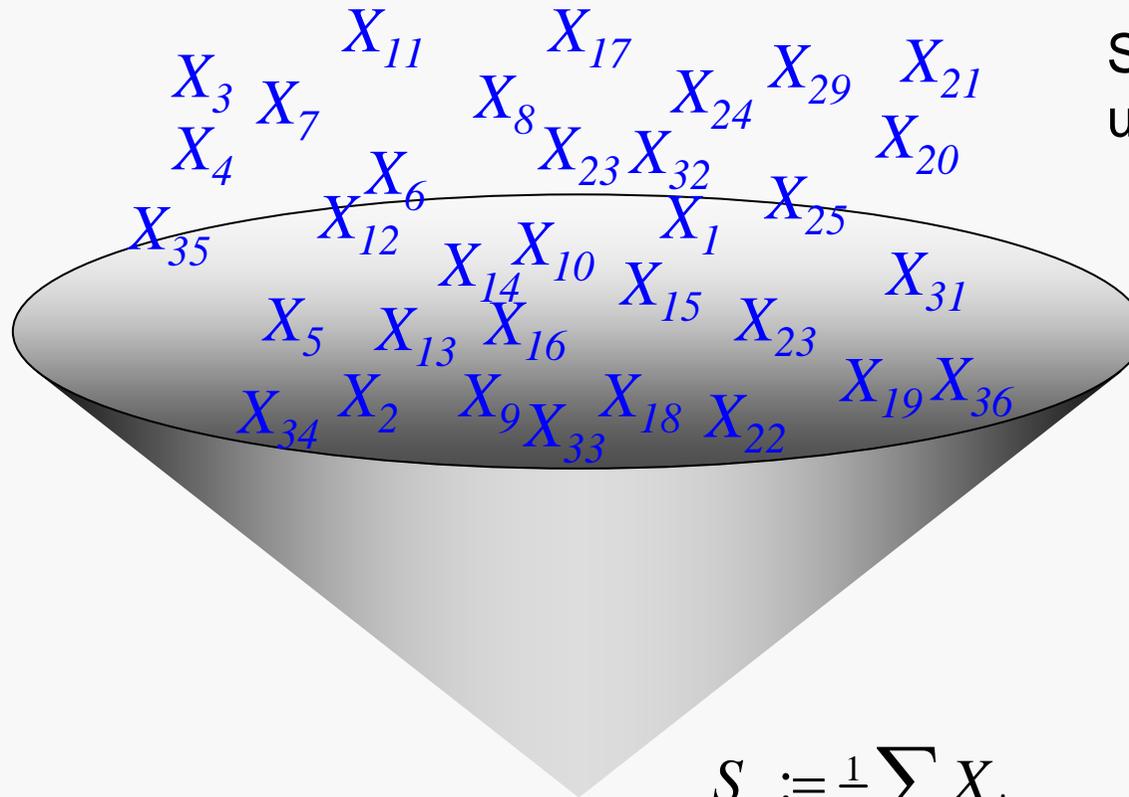
- Vertikaler und horizontaler Risikoausgleich
- ALM-Modell der Lebensversicherung



# Was leistet überhaupt ein Versicherer?



# Risikotransformation



Stochastisch  
unabhängige Zva

$$S_n := \frac{1}{n} \sum X_i$$
$$\text{Var}(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



# Vertikaler Risikoausgleich

Da VU „sammelt“ in einem VersJahr stochastisch (fast) unabhängige Risiken ein und erhält hierfür Prämien. Zur Sicherstellung der Leistungen stellt das VU Risikokapital (Eigenkapital) zur Verfügung.

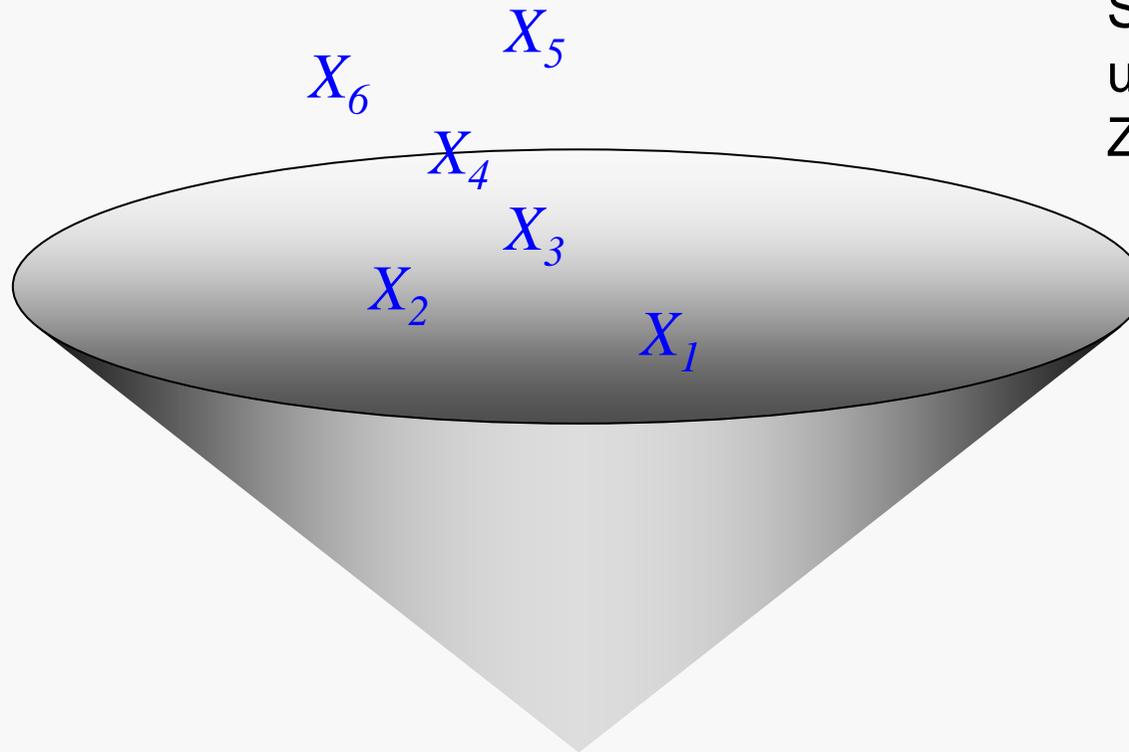
Am Ende des VersJahres wird abgerechnet.

Der Abrechnungsüberschuss ist der Gewinn des VU; entsprechend geht ein Defizit zu Lasten des VU.

Für dieses Geschäft sind faktisch keine Reserven nötig  
- wohl aber Eigenkapital!



# Horizontaler Risikoausgleich



Stochastisch (??)  
unabhängige (??)  
Zva



# Horizontaler Risikoausgleich (in der Zeit)

Reicht ein Versicherungsjahr nicht aus, um genügend unabhängige Risiken zusammen zu führen, so muss die Abrechnungsperiode verlängert werden.

Da jedoch jährlich abgerechnet werden muss, sind Reserven (Rückstellungen) erforderlich.

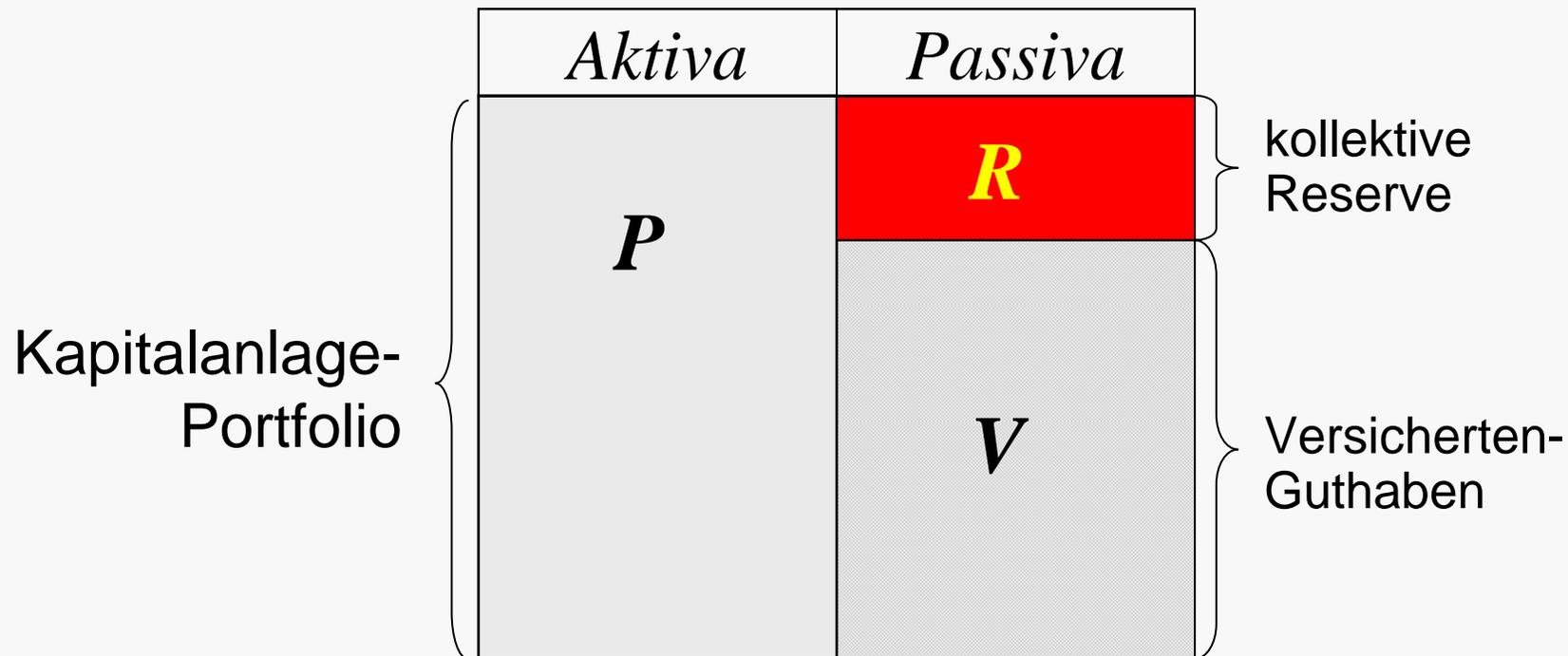
Beispiele:

- Sehr seltenen Ereignisse mit sehr hohen Schäden (Naturkatastrophen)
- Kapitalmarktrisiken
  - unsystematische Risiken (Mischung und Streuung)
  - systematische Risiken



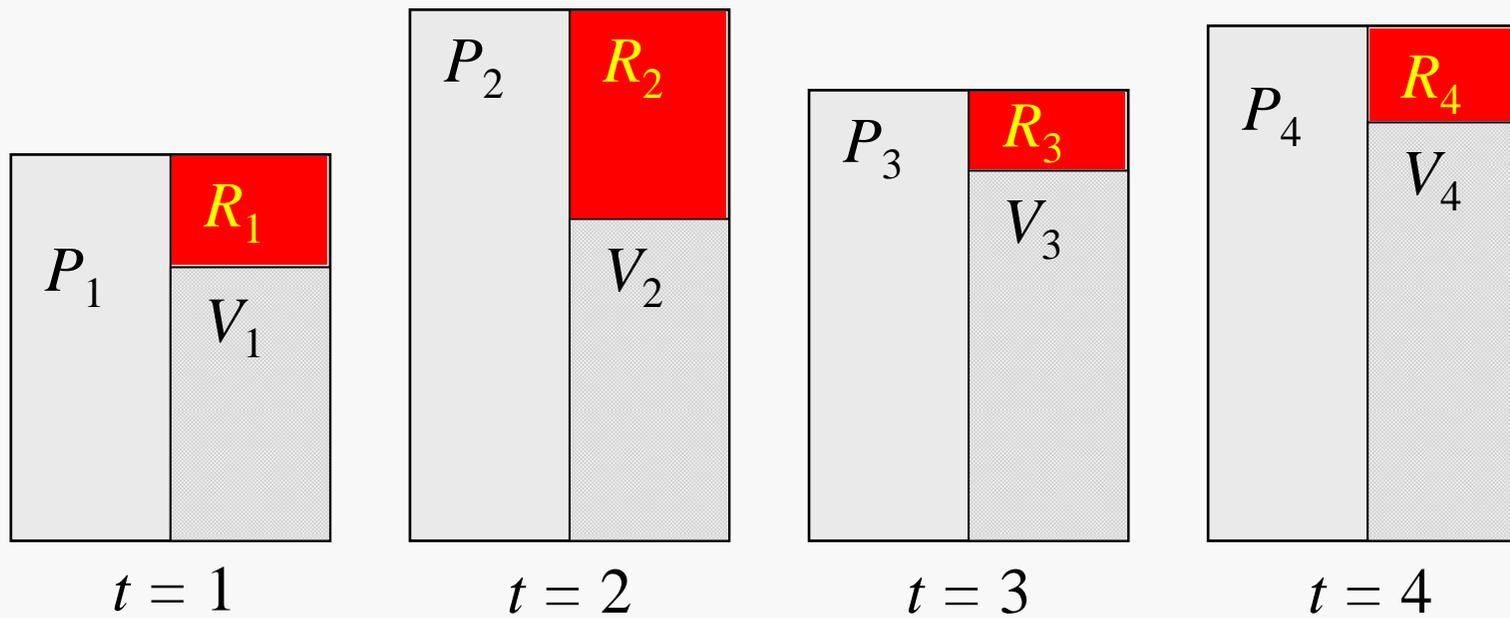
# Horizontaler Risikoausgleich bei Lebensversicherungsprodukten

vereinfachte Bilanz eines Lebensversicherers:



# Horizontaler Risikoausgleich bei Lebensversicherungsprodukten

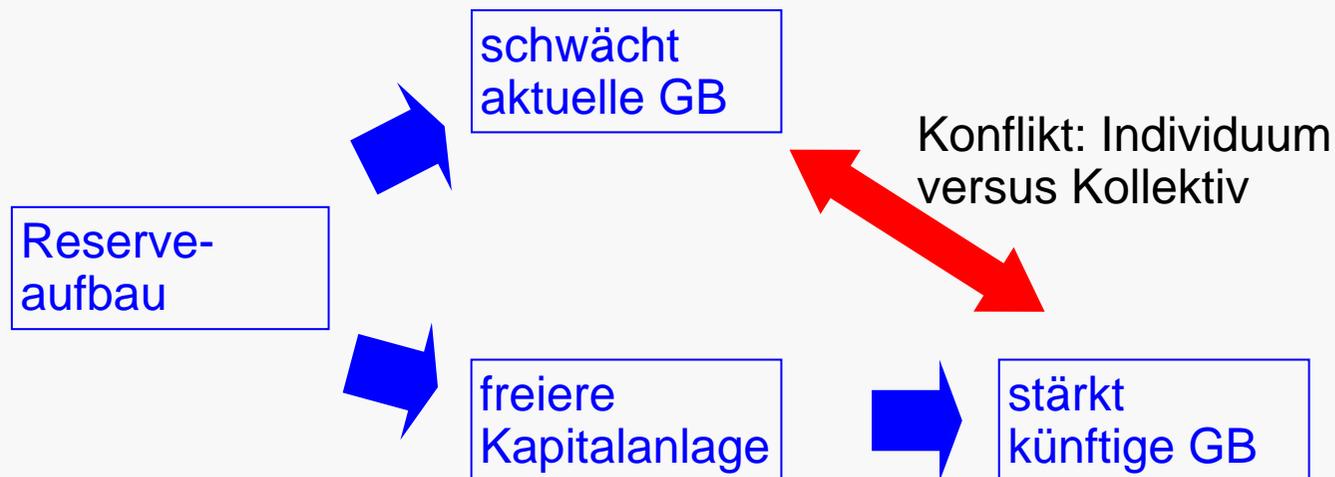
Glättung der Guthabenverzinsung:



# Ausgleich von Kapitalmarktrisiken in der Zeit

Fragen:

- Was hat der Kunde überhaupt davon?
- Wie funktioniert die Risikotransformation?



# Modell

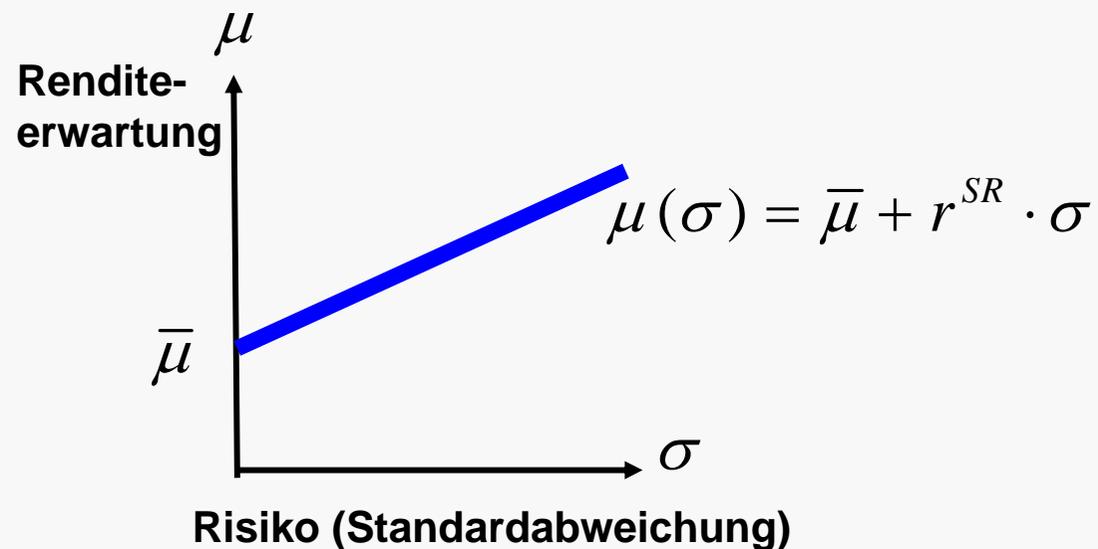
- Kapitalmarkt
- Strategie des LVU



# Kapitalmarkt

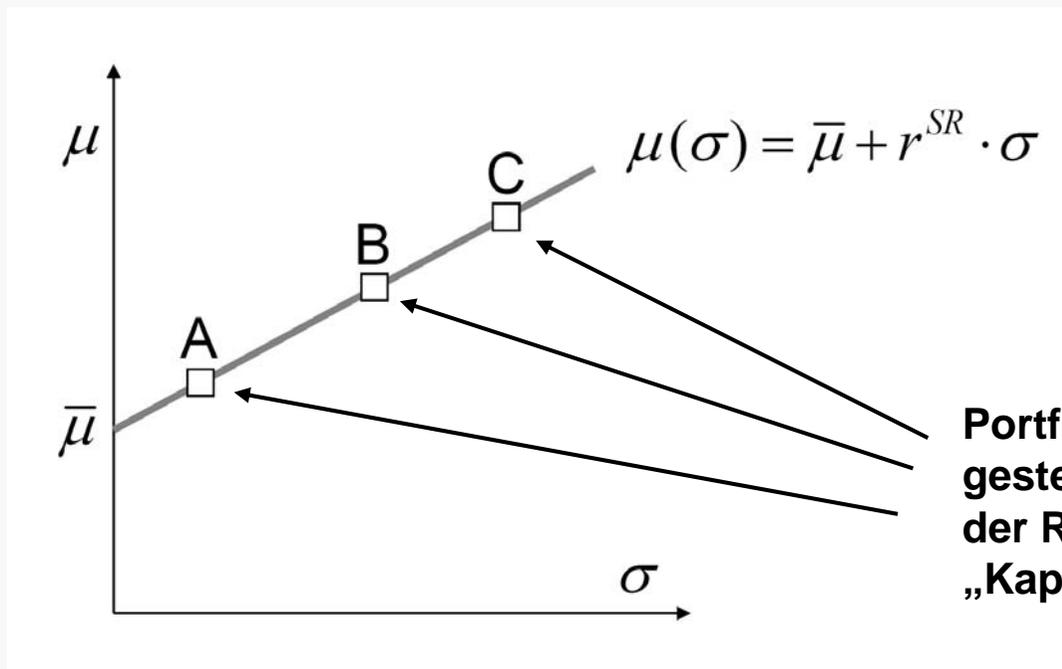
Wird charakterisiert durch 3 Parameter:

- sicherer Zins:  $\bar{\mu}$
- Sharpe-Ratio: Zusatzzins pro Risikoeinheit:  $r^{SR}$
- Mean-Reversion-Parameter:  $\xi$



# Portfolioauswahl

Die Asset-Allokation wird durch einen Parameter ( $\sigma$ ) festgelegt.



Portfolioauswahl wird gesteuert durch die Wahl der Risikoposition auf der „Kapitalmarktkurve“



# Stochastik des Kapitalmarktes

## Ein-Perioden-Modell:

Wähle zu Beginn der Periode  $[t, t + \Delta]$  die Risikoposition  $\sigma_t$ .  
Daraus bestimmt sich  $\mu_t = \mu(\sigma_t)$ .

Die (stetige) Verzinsung ist dann normalverteilt:

$$\ln\left(\frac{P_{t+\Delta}}{P_t}\right) = \Delta \cdot \underbrace{\left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)}_{\text{Drift}} + \sigma_t \cdot \underbrace{\left(W_{t+\Delta} - W_t\right)}_{\sim \mathcal{N}(0, \Delta)}$$



# Stochastik des Kapitalmarktes

## Zeitstetiges Modell (Random Walk):

Wähle in Abhängigkeit von den Beobachtungen der Vergangenheit den „Risikopfad“  $(\sigma_t)_{t \in [0, T]}$ . Dann gilt folgende Darstellung:

$$P_t = P_0 \cdot \exp \left( \int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) ds + \underbrace{\int_{[0,t]} \sigma_s dW_s}_{\text{stochastisches Integral}} \right)$$

stochastisches  
Integral



# Stochastik des Kapitalmarktes

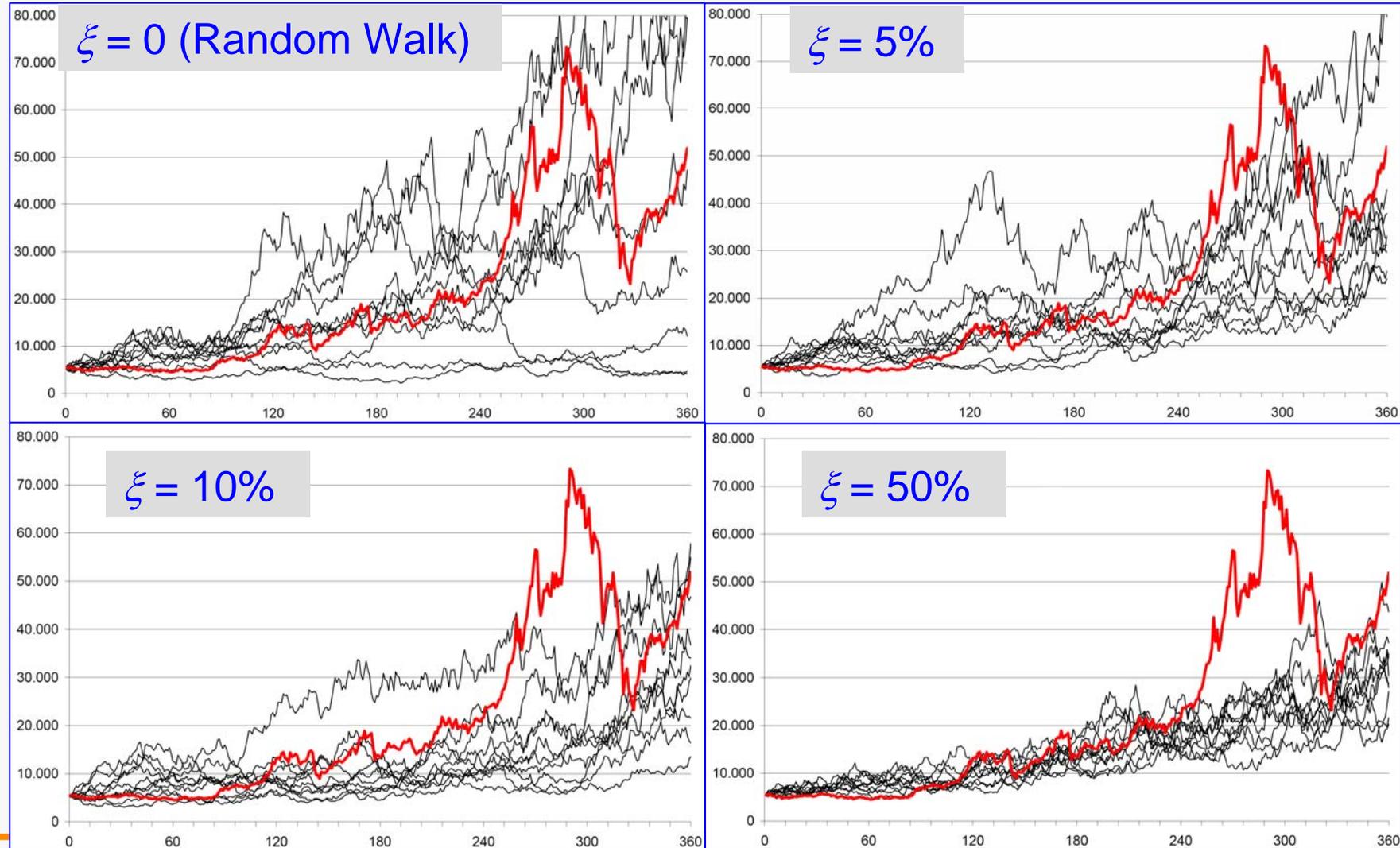
## Zeitstetiges Modell (Mean-Reverting):

Der Mean-Reversion-Parameter  $\xi$  steuert die „Rückkehr-Intensität“ zum Drift-Pfad.

$$P_t = P_0 \cdot \exp \left( \int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) ds + \int_{[0,t]} \exp(-\xi \cdot (t-s)) \cdot \sigma_s dW_s \right)$$



# Simulationen



# Risiko eines Sparprozesses

Zwei Betrachtungsweisen:

- „Augen zu und durch!": Der Sparer schaut nur auf das Endergebnis des Sparprozesses.
  - ➔ Risiko = Standardw. (Rendite des Endverm.)
  - Risiko = Maß für die Planbarkeit der Versorgung
- „Augen auf!": Der Sparer beobachtet laufend die Verzinsung.
  - ➔ Risiko = Volatilität des Zinspfades
  - Risiko = Maß für den Anlegerstress



# Zunächst Fondssparen

Anlagestrategie: Constant-Mix

Bezogen auf den aktuellen Marktwert wird eine gleich bleibende Risikoposition gehalten.

„Steigen die Aktienkurse, so wird so werden Aktien verkauft.“

Im Unterschied hierzu: Buy-and-Hold



# Betrachtung des Endvermögens

Wir betrachten die Rendite des Endvermögens als Zufallsvariable.

$S_n$  : Endvermögen eines Sparprozesses (Einmalanlage oder gleich bleibende Sparraten) nach  $n$  Jahren.

$\mu(S_n)$  : Rendite bezogen auf die Einmalanlage bzw. auf die gezahlten Sparraten.

Wir werten aus:

$\mathbb{E}(\mu(S_n))$  : erwartete Rendite

$\sqrt{\text{Var}(\mu(S_n))}$  Standardabw. der Rendite des Endvermögens

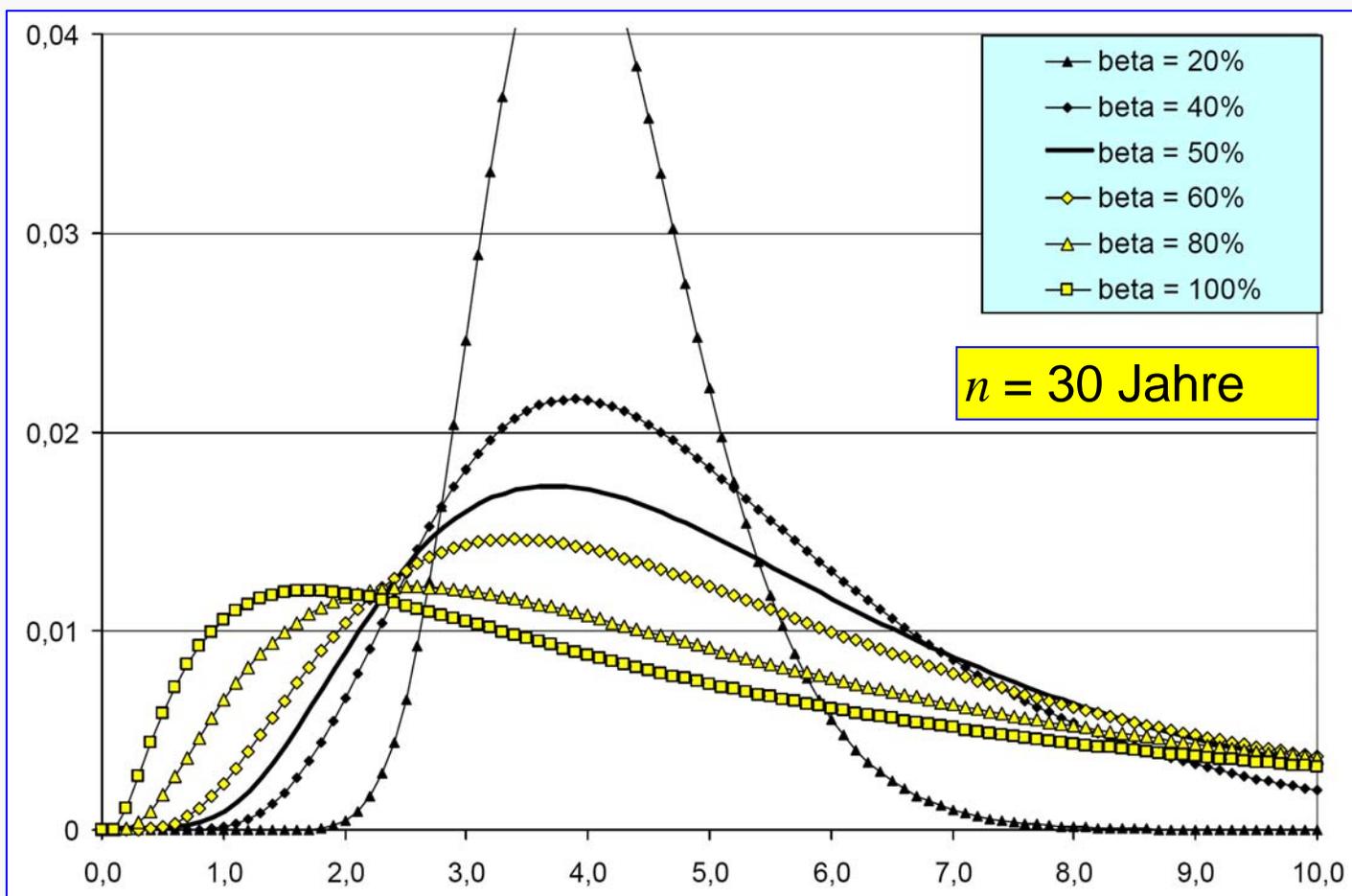
Achtung!

$$\mathbb{E}(\mu(S_n)) < \mu(\mathbb{E}(S_n))$$



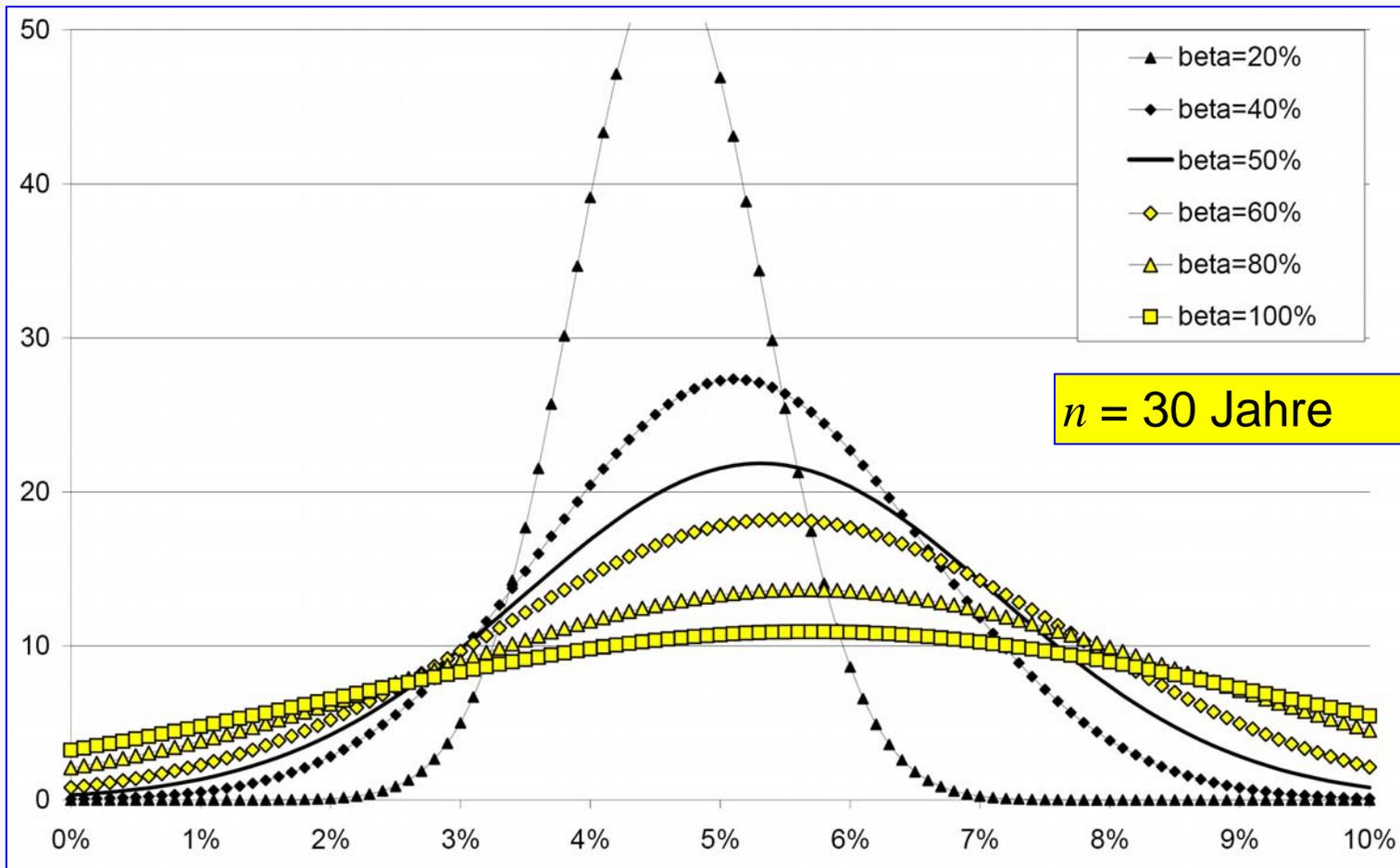
# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

Endvermögen (in Abhängigkeit von  $\sigma = \beta \cdot 20\%$ ):



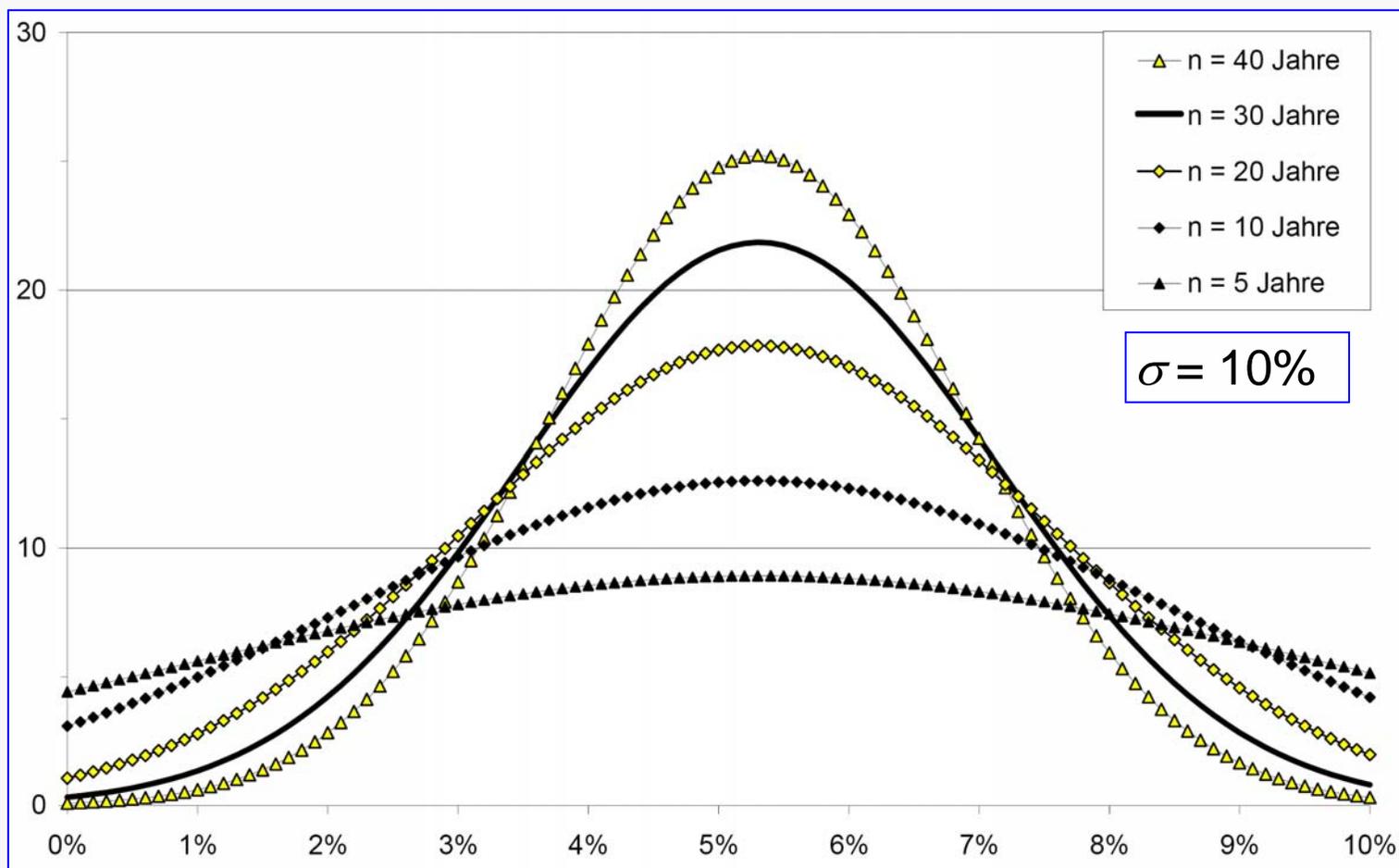
# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

Rendite des EV (in Abhängigkeit von  $\sigma = \beta \cdot 20\%$ ):



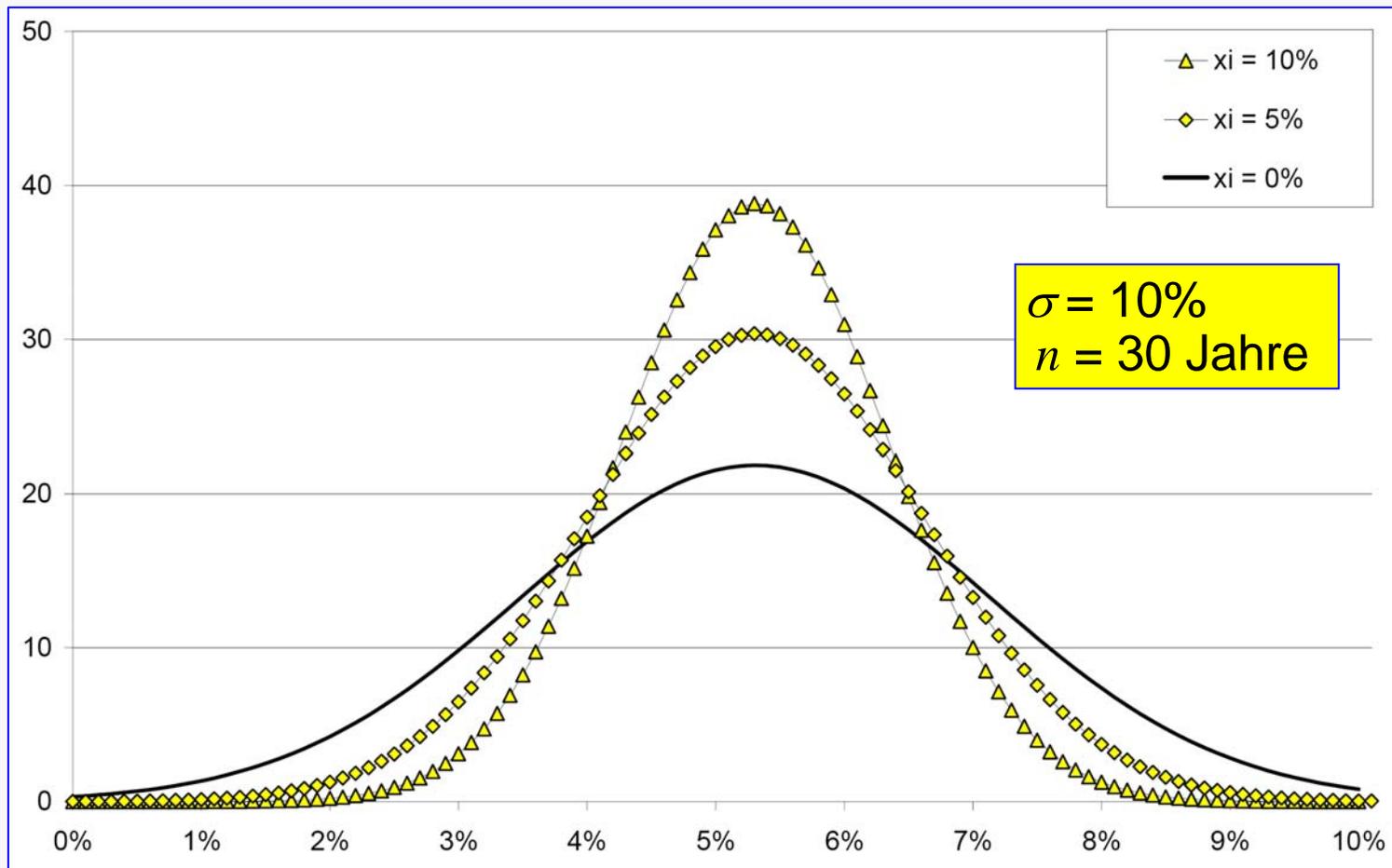
# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

Rendite des EV (in Abhängigkeit von der Laufzeit)



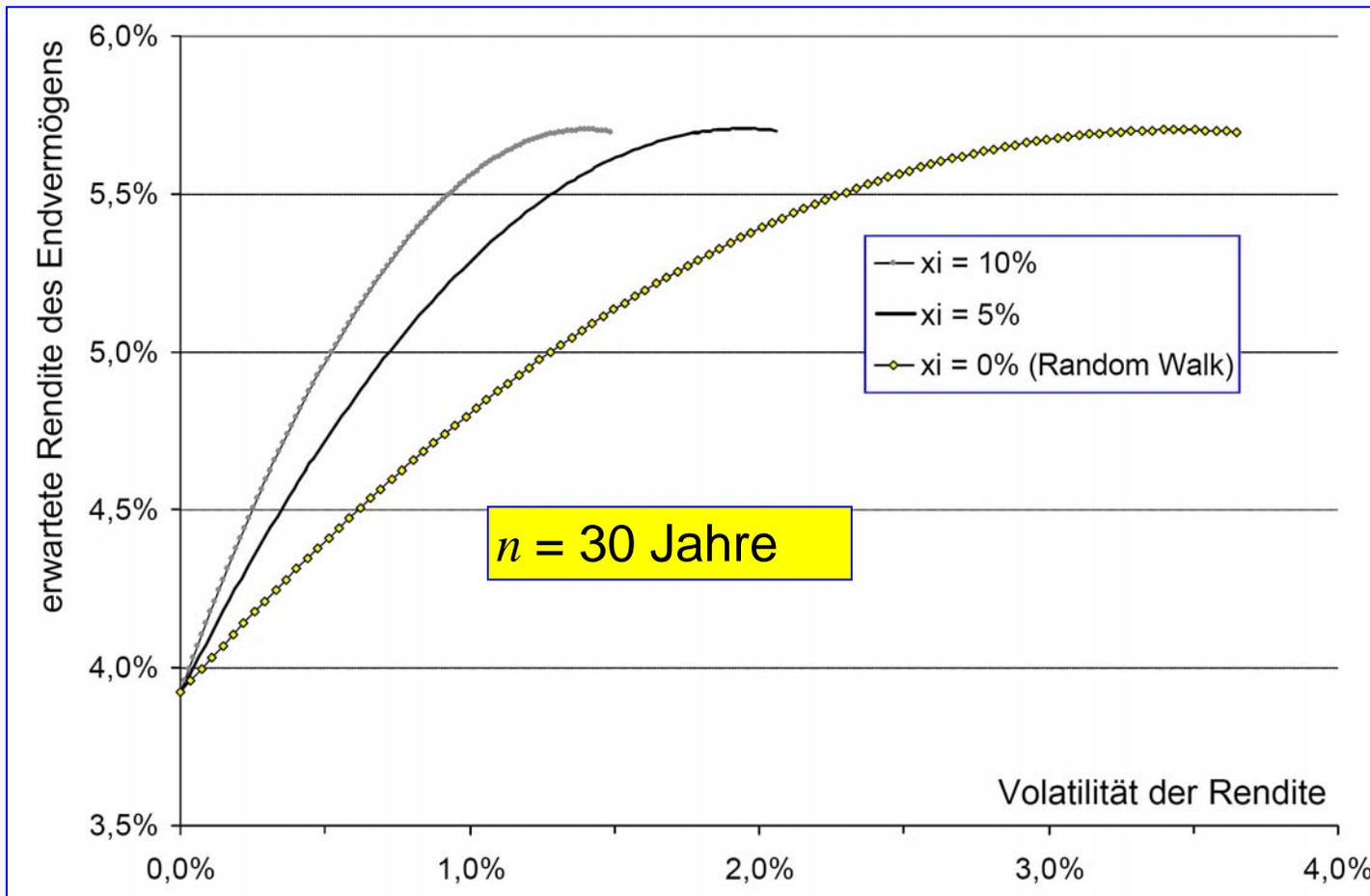
# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

Rendite des EV (in Abhängigkeit von  $\xi$ )



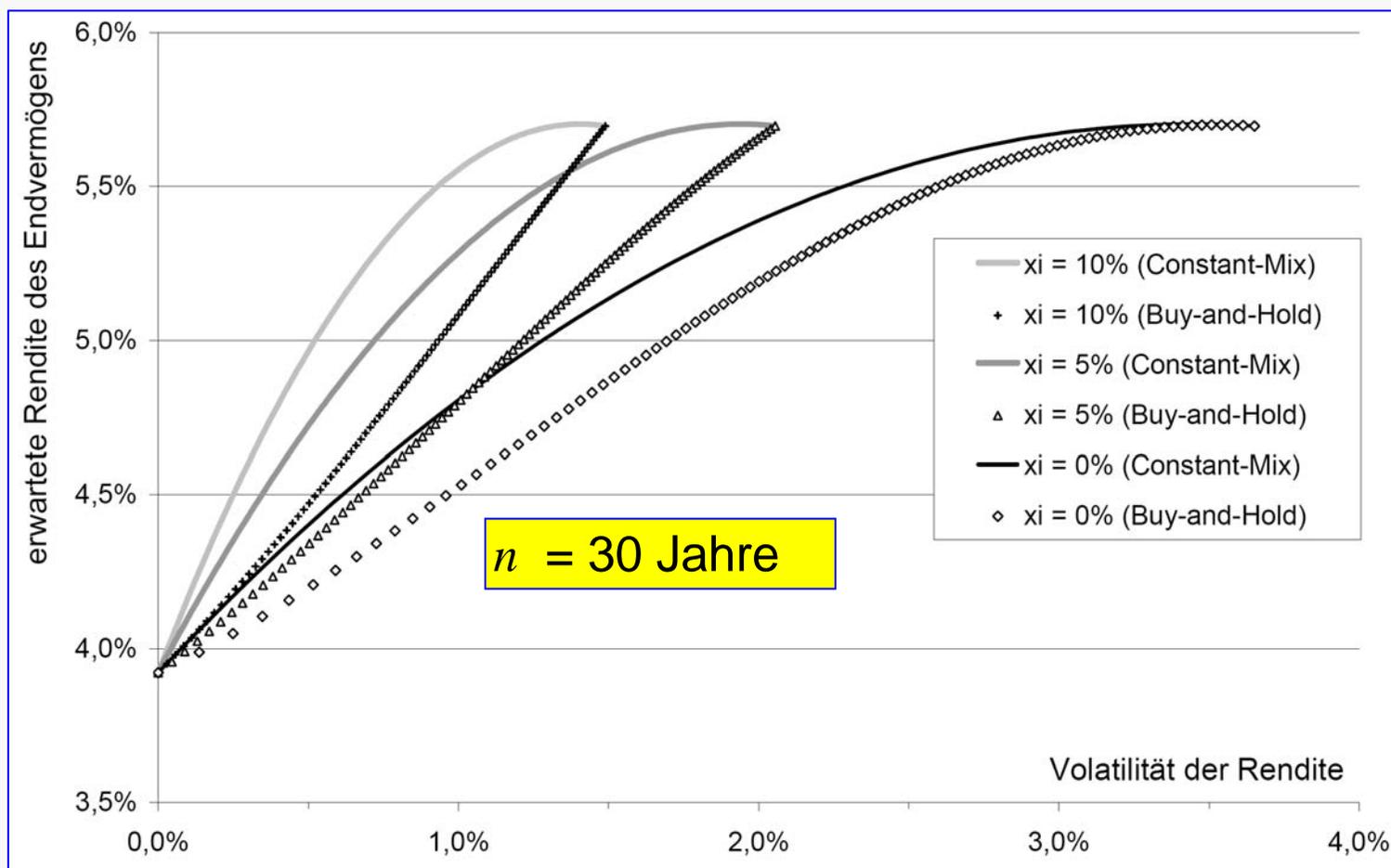
# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

Rendite-Risiko-Profil des EV (in Abhängigkeit von  $\xi$ )



# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

## Rendite-Risiko-Profil: Vergleich mit Buy-and-Hold

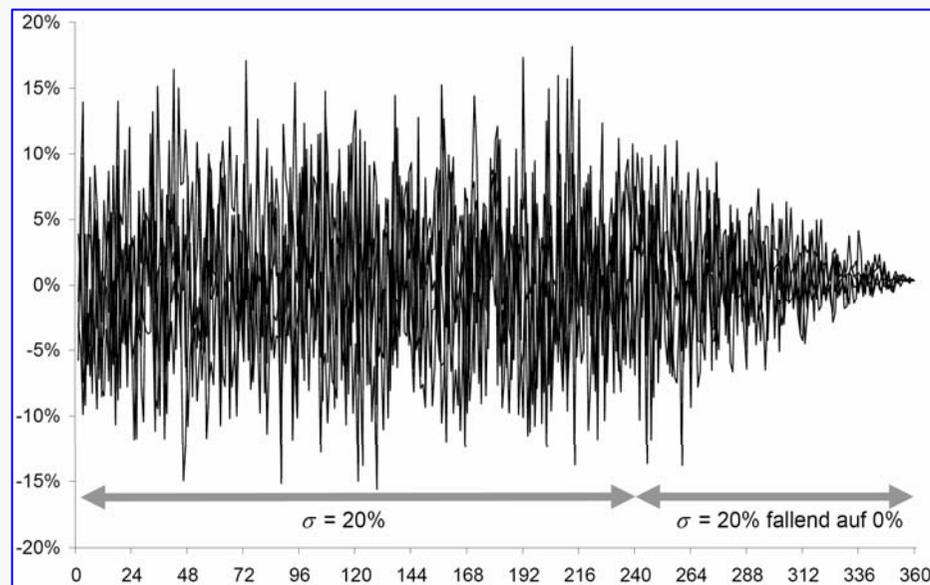


# Life-Cycle-Modelle

Bei der Const-Mix-Strategie ist der Anlegerstress während der gesamten Laufzeit konstant

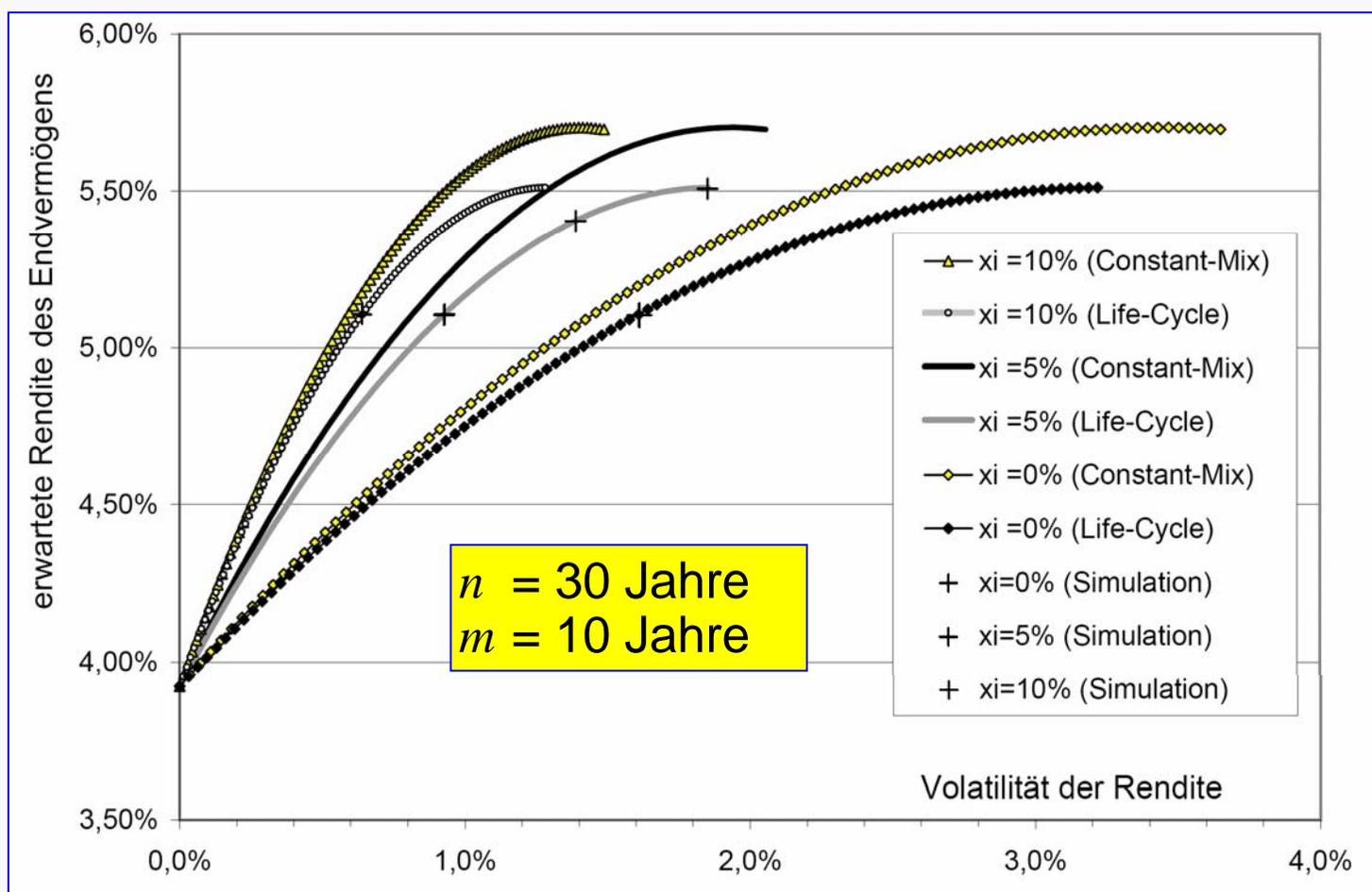
Offensichtlich sind aber Wertschwankungen kurz vor Rentenbeginn gravierender als in jungen Jahren.

Life-cycle-Modelle:  
Zum Ende der Laufzeit  
wird die Volatilität  
sukzessive reduziert.



# Ergebnisse: Fondsanlage (Einmalanlage)

## Rendite-Risiko-Profil: Vergleich mit Life-Cycle



# Modell für das kollektive Sparen in der LV

Bezeichnungen:

$(P_t)_{0 \leq t \leq T}$  Portfolio

$(V_t)_{0 \leq t \leq T}$  Versichertenguthaben

$(R_t)_{0 \leq t \leq T}$  Reserve

$(\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$  Deklaration als stetiger Zins

$\rho_t := -\ln\left(1 - \frac{R_t}{P_t}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{V_t}\right) \approx \frac{R_t}{P_t}$  log-Reservequote

$V_t = V_0 \cdot \exp\left(\int_0^t \eta_s ds\right)$  Fortschreibung der Versichertenguthaben



# ALM-Strategie

Das LVU hat zwei Steuerungsparameter

$(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$  steuert die Aktiv-Seite

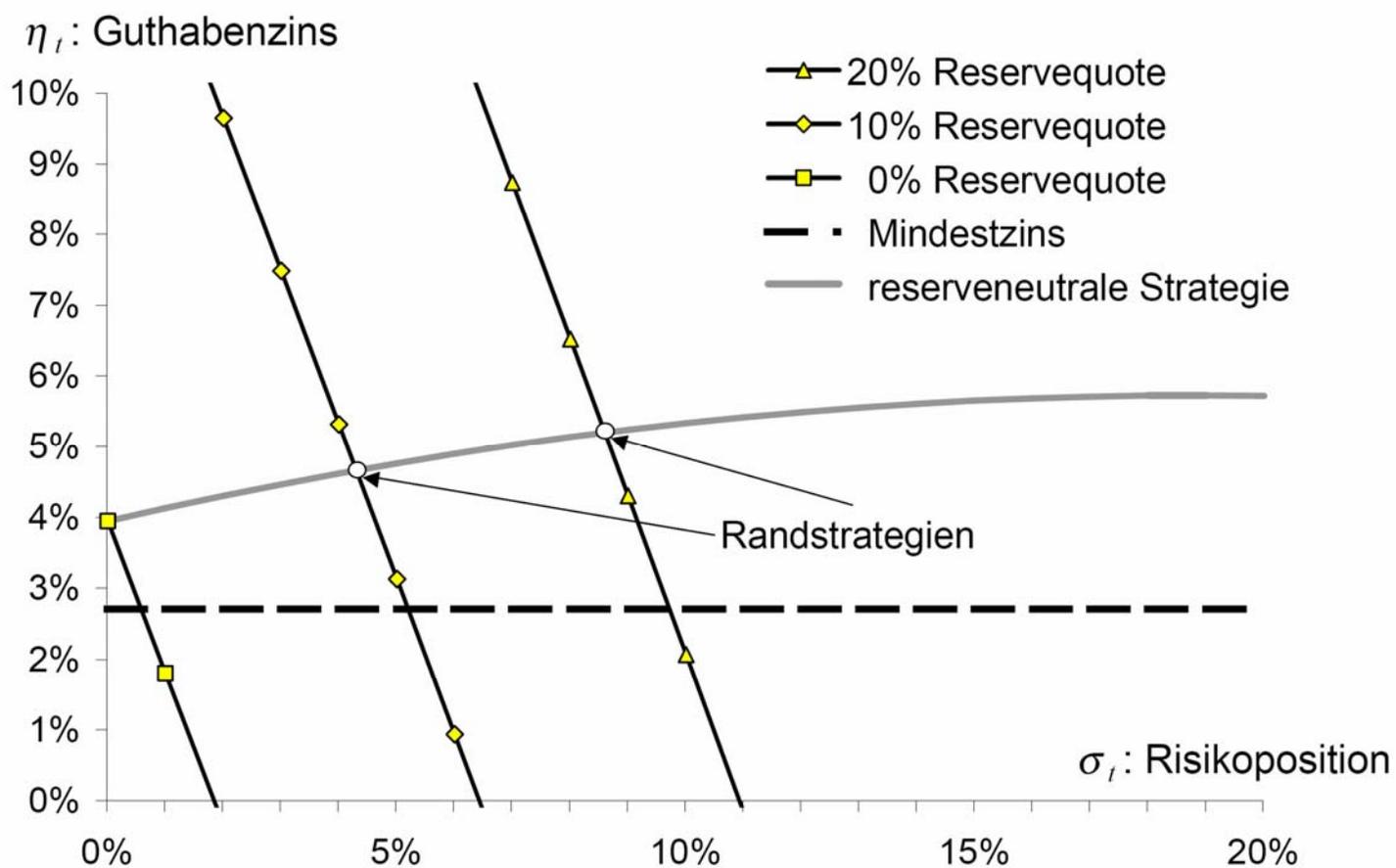
$(\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$  steuert die Passiv-Seite

**Asset-Liability-Management** ist die **simultane** Steuerung der Aktiv- und Passiv-Seite der Bilanz.

**ALM-Strategie** ist eine Regel, die in Abhängigkeit von den Beobachtungen der Vergangenheit die Risikoposition und die Deklaration unter Beachtung von Nebenbedingungen festlegt.



# Zulässige ALM-Strategien



# Beispiel: „LV-Constant-Mix“-Strategie

Das LVU strebt eine gleich bleibende Risikoposition auf der Asset-Seite an.

Die Passivseite wird in Abhängigkeit von der Reservequote gesteuert:

$\rho_t = \rho_{\text{Ziel}}$  : Reserve-neutrale Deklaration

$\rho_t > \rho_{\text{Ziel}}$  : Reserve-abbauende Deklaration

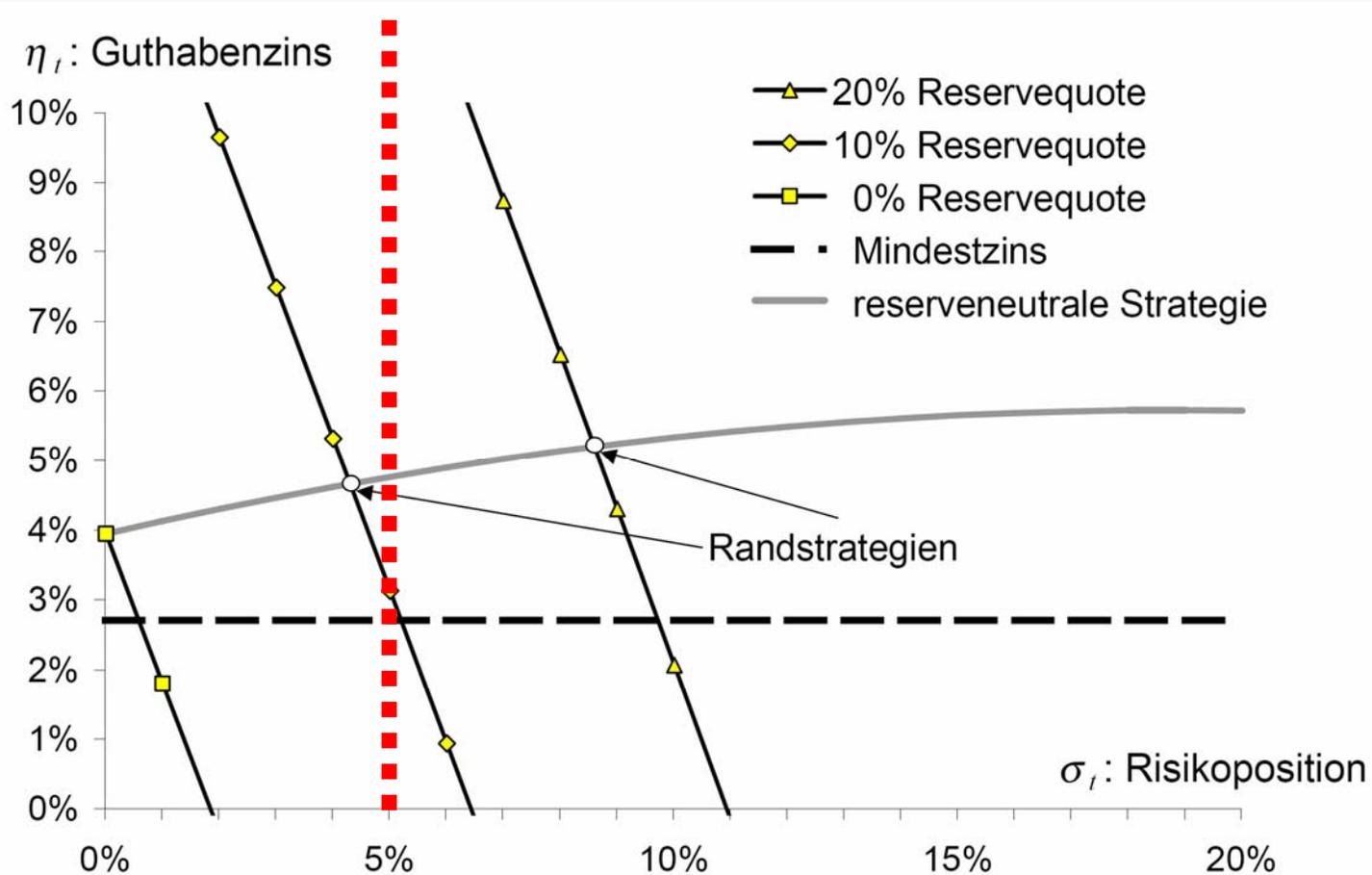
$\rho_t < \rho_{\text{Ziel}}$  : Reserve-aufbauende Deklaration

$$\eta_t = \eta_t(a) = \mu_0 - \frac{1}{2}\sigma_0^2 + a \cdot (\rho_t - \rho_{\text{Ziel}})$$

$a$  : „Glättungsparameter“



# LV-Constant-Mix-Strategie



# Nutzen für den Kunden

Anlegerstress: Volatilität des Zinspfades

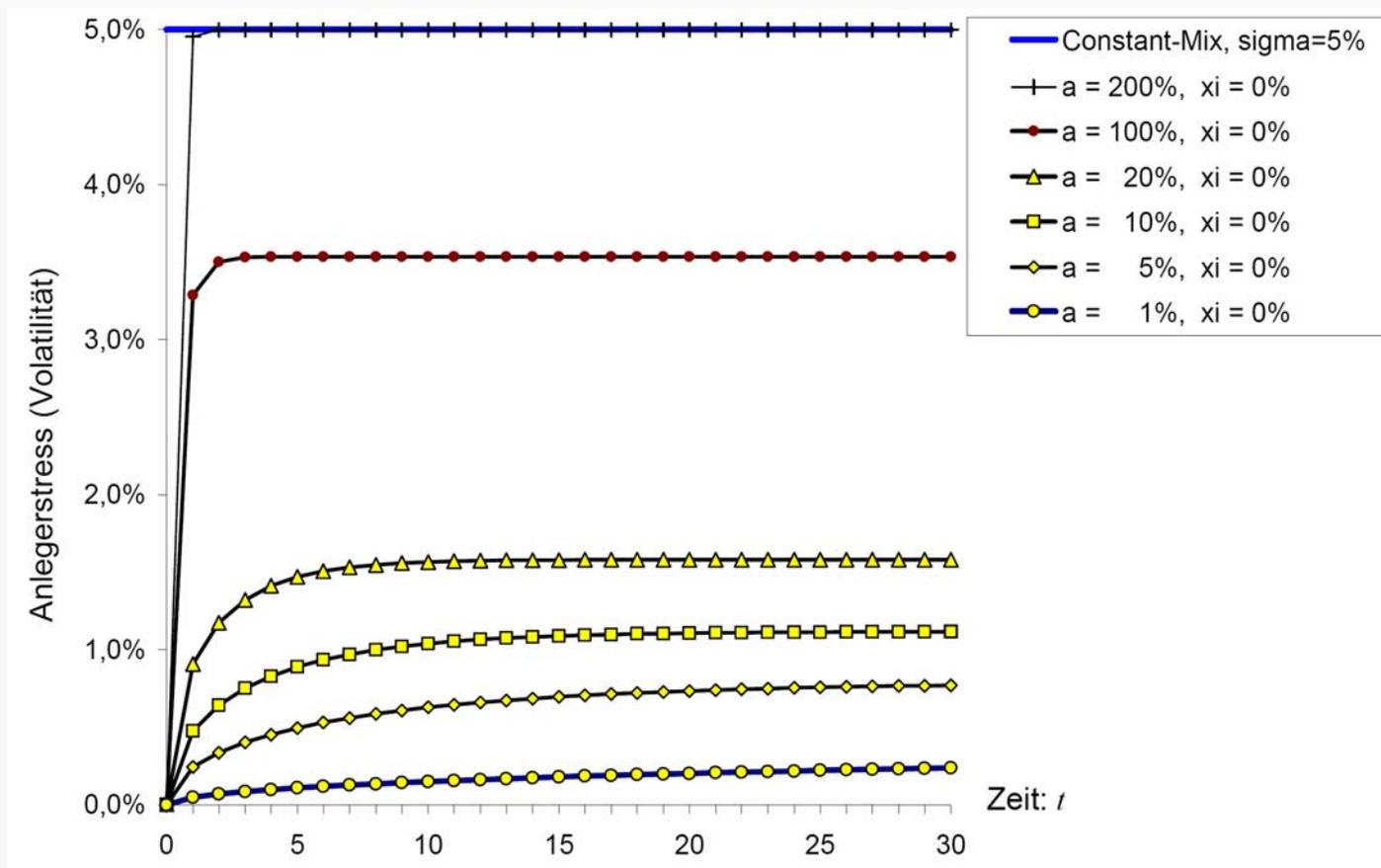
Referenzmodell: Fondsanlage mit konstantem Risiko  
(hier: gleichbleibende Volatilität  $\sigma_0 = 5\%$ )

$$\text{Vola}(\eta_t(a)) = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}a(1 - \exp(-2at))}$$

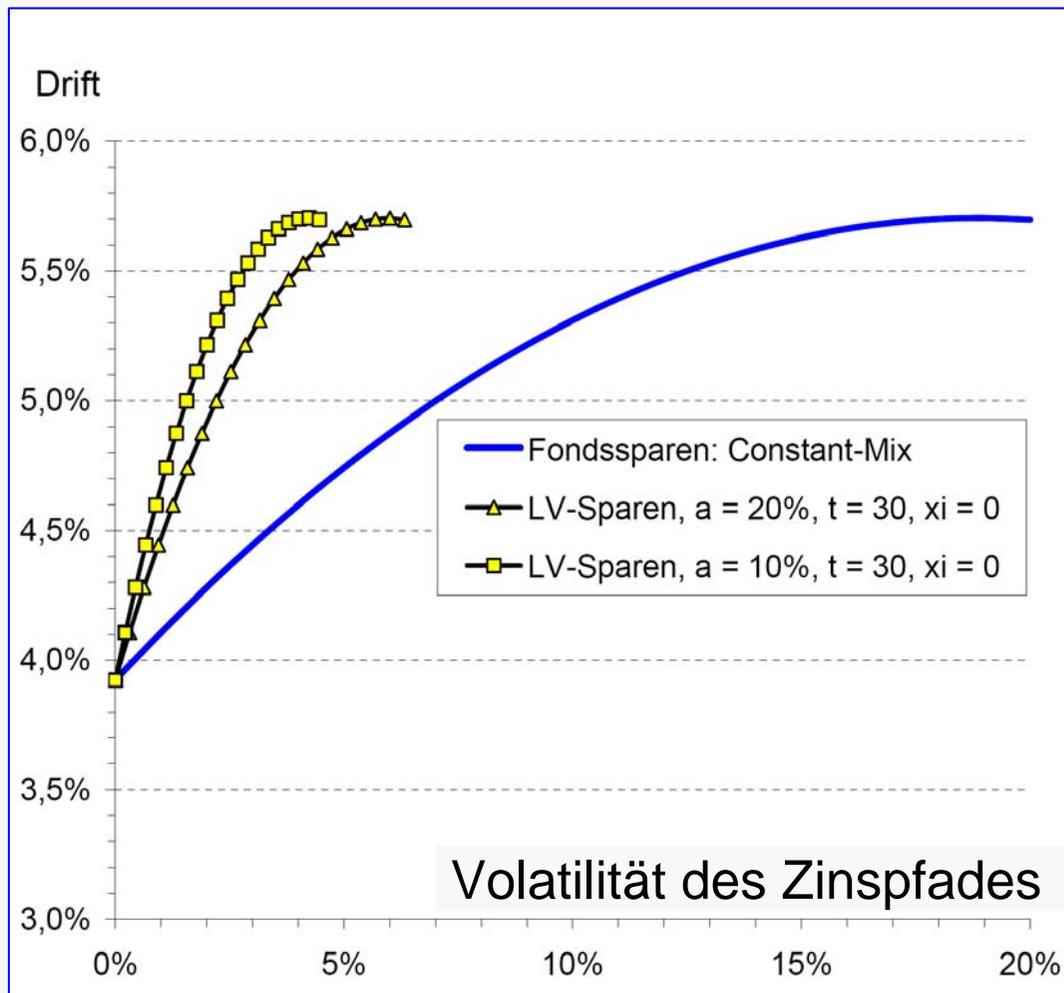


## Anlegerstress in Abhängigkeit vom Glättungsparameter $a$

$$\text{Vola}(\eta_t(a)) = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}a(1 - \exp(-2at))}$$



# Transformationsleistung des LVU



# Ergebnisse

Vorbemerkung:

- Bei Einmalanlagen kann man fast alles rechnen!
- Bei Sparprozessen mit laufenden Sparbeiträgen kann man fast nichts rechnen –allenfalls approximieren!

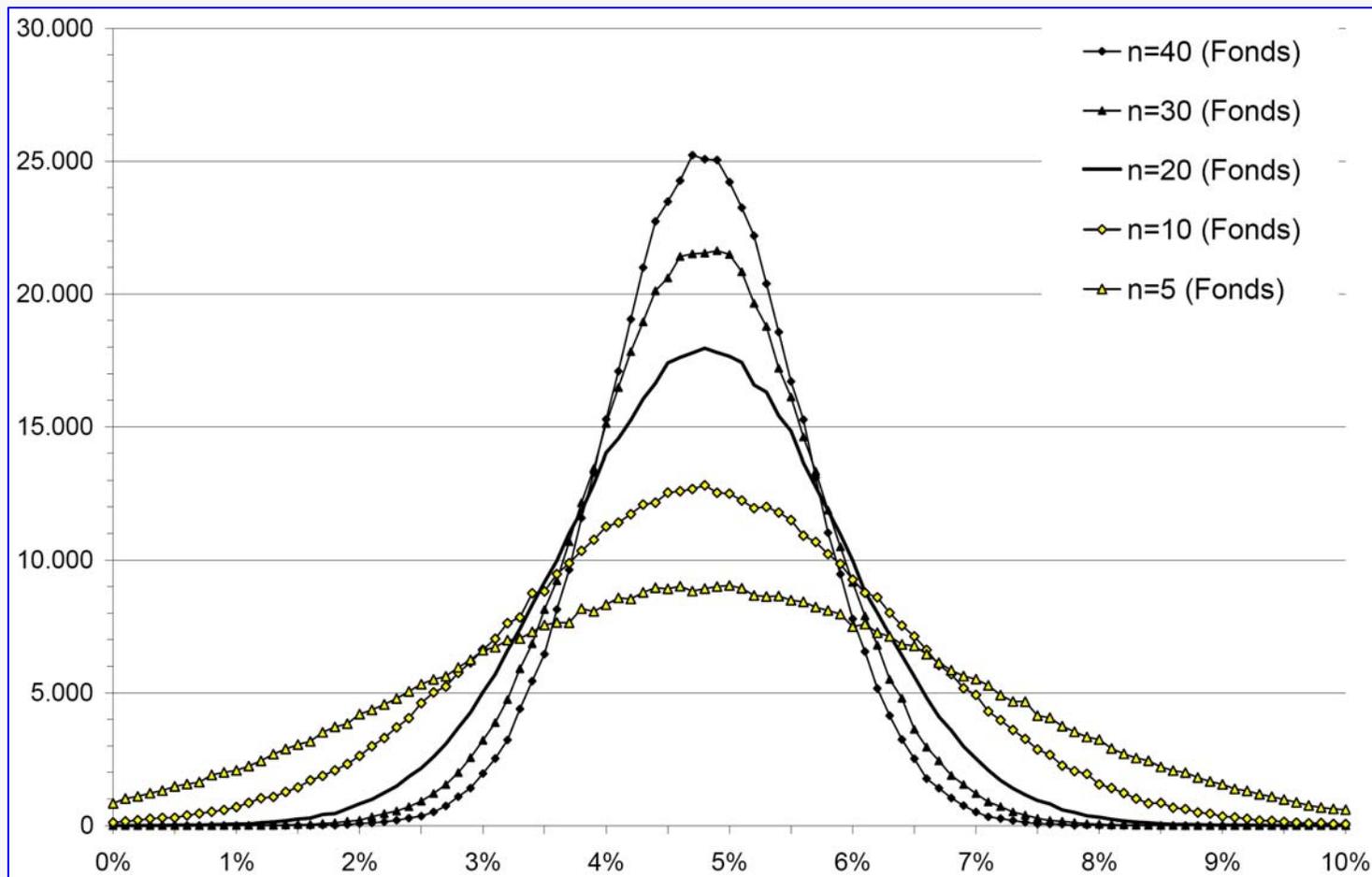
Wir vergleichen

- Fondsanlage mit Constant-Mix-Strategie
- Lebensversicherung mit Reserveausgleich



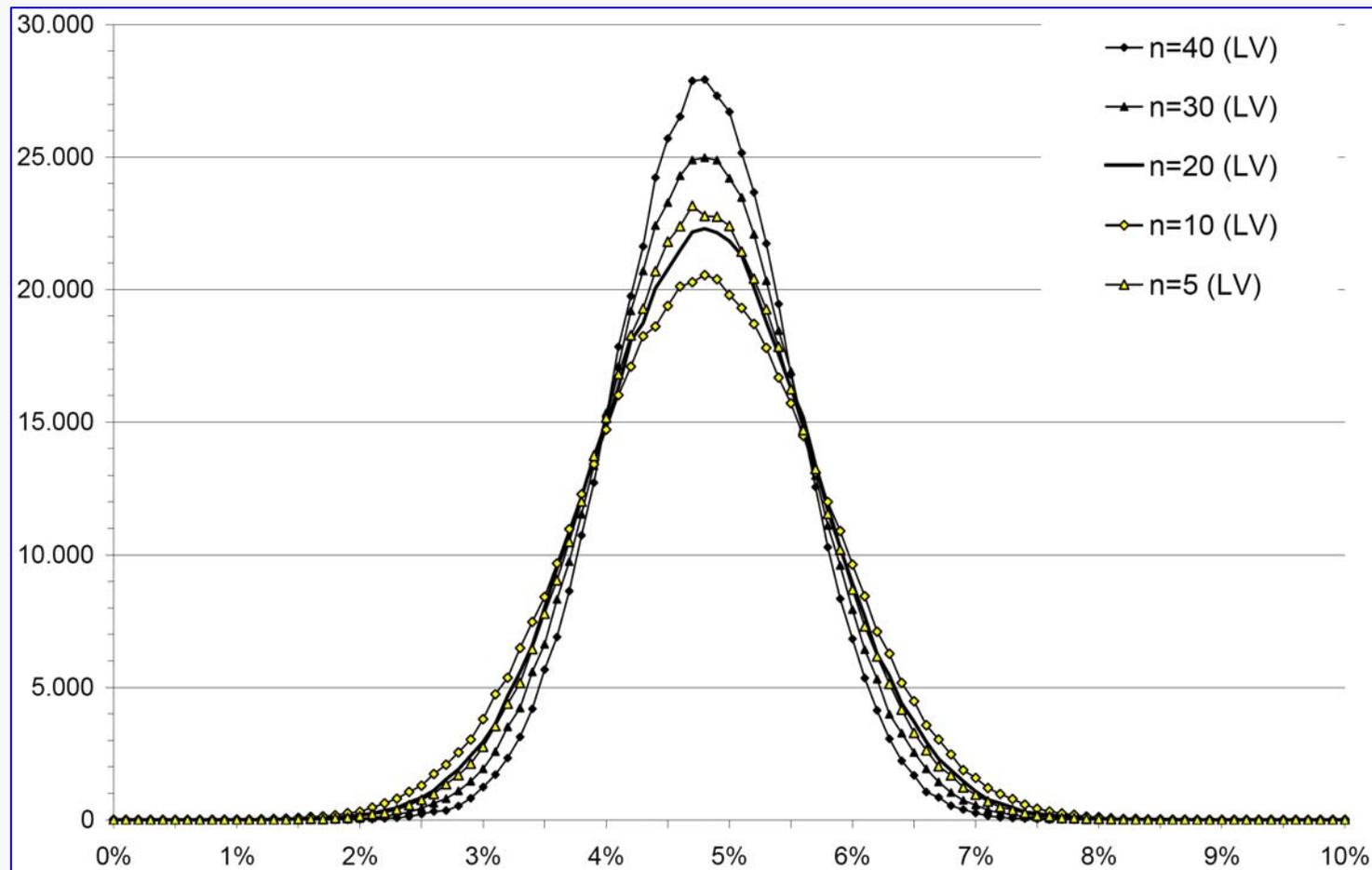
# Vergleich: Fondsanlage und LV-Anlage

Verteilung der Rendite des Endvermögens (EP, Fonds)



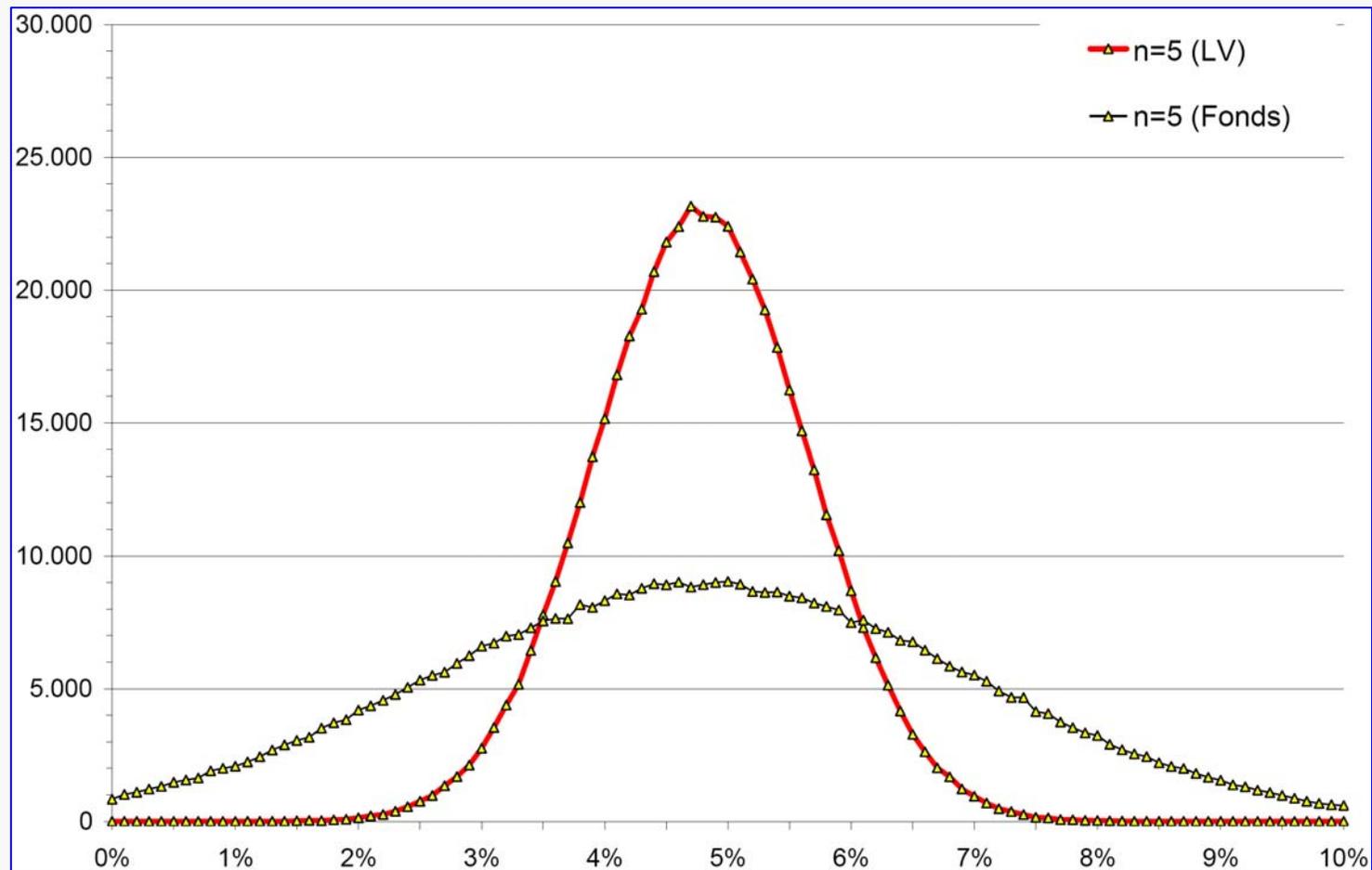
# Vergleich: Fondsanlage und LV-Anlage

Verteilung der Rendite des Endvermögens (EP, LV)



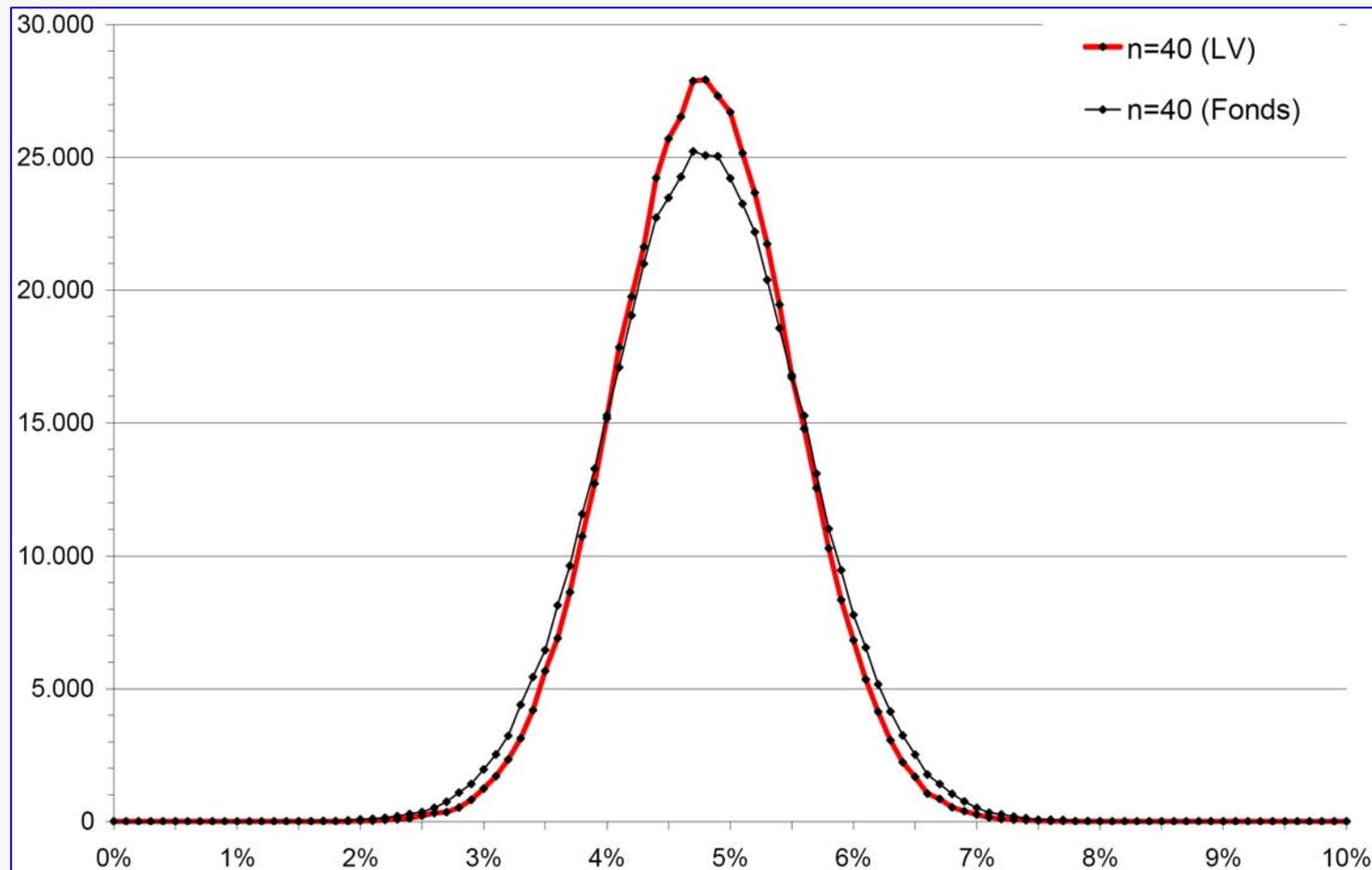
# Vergleich: Fondsanlage und LV-Anlage

Verteilung der Rendite des Endvermögens (EP,  $n=5$ )



# Vergleich: Fondsanlage und LV-Anlage

Verteilung der Rendite des Endvermögens (EP, n= 40)



# Echte ALM-Strategie eines LVU

Die ALM-Strategie, bei der nur die Deklaration angepasst wird, nicht jedoch die Risikoposition der Kapitalanlage, kann eine negative Reserve nicht verhindern.

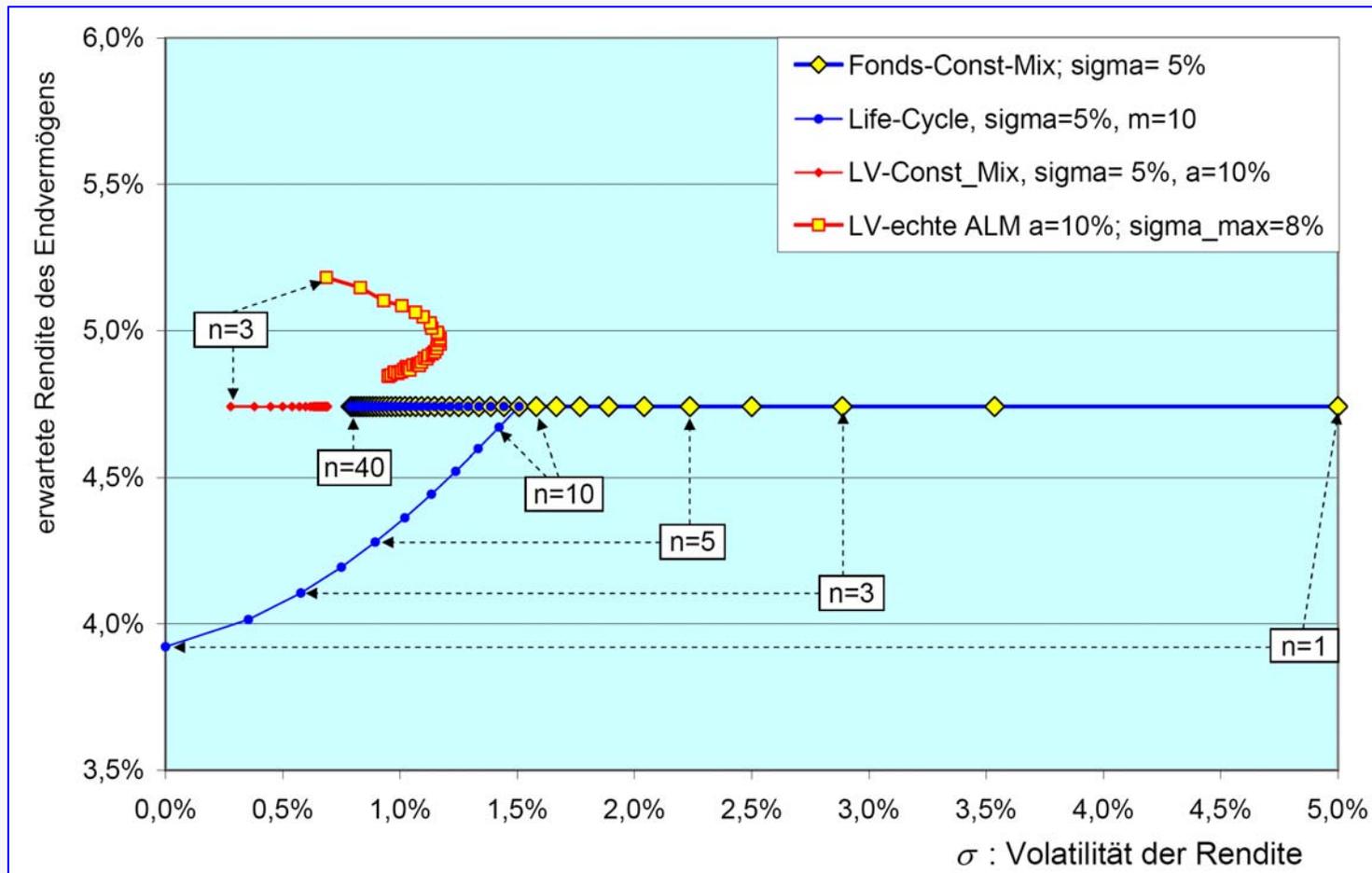
## Echte-ALM-Strategie:

- Das LVU maximiert die Risikoposition
- ... unter der Nebenbed., dass die Mindestreserve mit großer Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten wird
- Die Deklaration wird angepasst, so dass für einen vorgegebenen Zeithorizont (im Erwartungswert) die Zielreserveposition erreicht wird.



# Vergleich: Fondsanlage und LV-Anlage

my-sigma-Profil in Abhängigkeit von der Restlaufzeit



# Wozu benötigen Lebensversicherer Reserven?

- Altersvorsorge bedeutet langfristiges **Sparen**.
- Altersvorsorgesparen steht im Spannungsfeld von Rendite und Risiko.
- Kollektives Sparen in der LV ermöglicht einen Risikoausgleich in der Zeit.
- Der kollektive Risikoausgleich in der Zeit ermöglicht bei gleicher Rendite ein niedrigeres Risiko oder bei gleichem Risiko eine bessere Rendite.
- Voraussetzung für das Wirken des kollektiven Ausgleichs
  - Reserveaufbau und Reserveabbau
  - Verzicht des Kunden auf jederzeitige Liquidierbarkeit ihres Altersvorsorgekapitals



# Herzlichen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

## Literatur:

**Goecke, Oskar: Über die Fähigkeit eines Lebensversicherers, Kapitalmarktrisiken zu transformieren, Blätter der DGVM, Band XXVI, Heft 2, November 2003, S. 207-227**

**Goecke, Oskar: Beispielrechnungen für Altersvorsorgeverträge – Rendite-Risikoprofil langfristiger Sparprozesse, Eul-Verlag, Lohmar 2006.**

Prof. Dr. Oskar Goecke  
Institut für Versicherungswesen  
Fachhochschule Köln  
Claudiusstraße 1  
50678 Köln  
[www.ivw-koeln.de](http://www.ivw-koeln.de)  
[oskar.goecke@fh-koeln.de](mailto:oskar.goecke@fh-koeln.de)

