

Kapitalmarktmodelle - worauf kommt es dabei für Aktuare an?

Vortrag im qx-Club

Düsseldorf, 06.02.2007

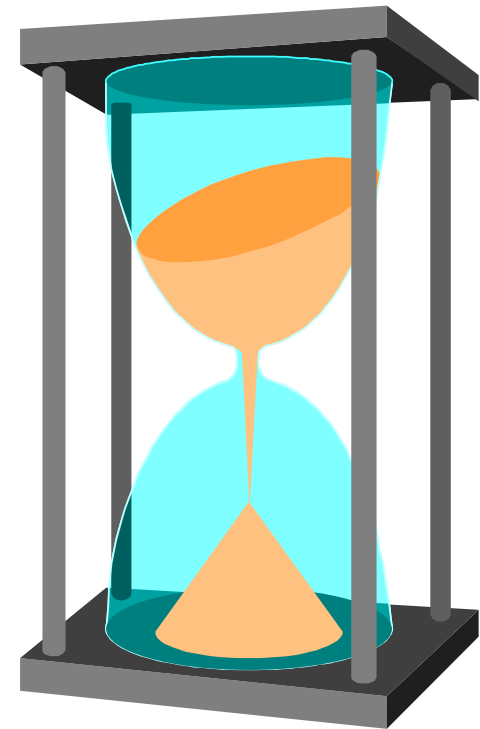
Gabriela Baumgartner

Dr. Michael Leitschkis

B&W Deloitte

Agenda

1. *Einführung*
2. **ESG-Eigenschaften**
3. **Grundzüge der Kalibrierung**
4. **ESG-Tests**
5. **Variance Reduction - Techniken**
6. **Ausblick**

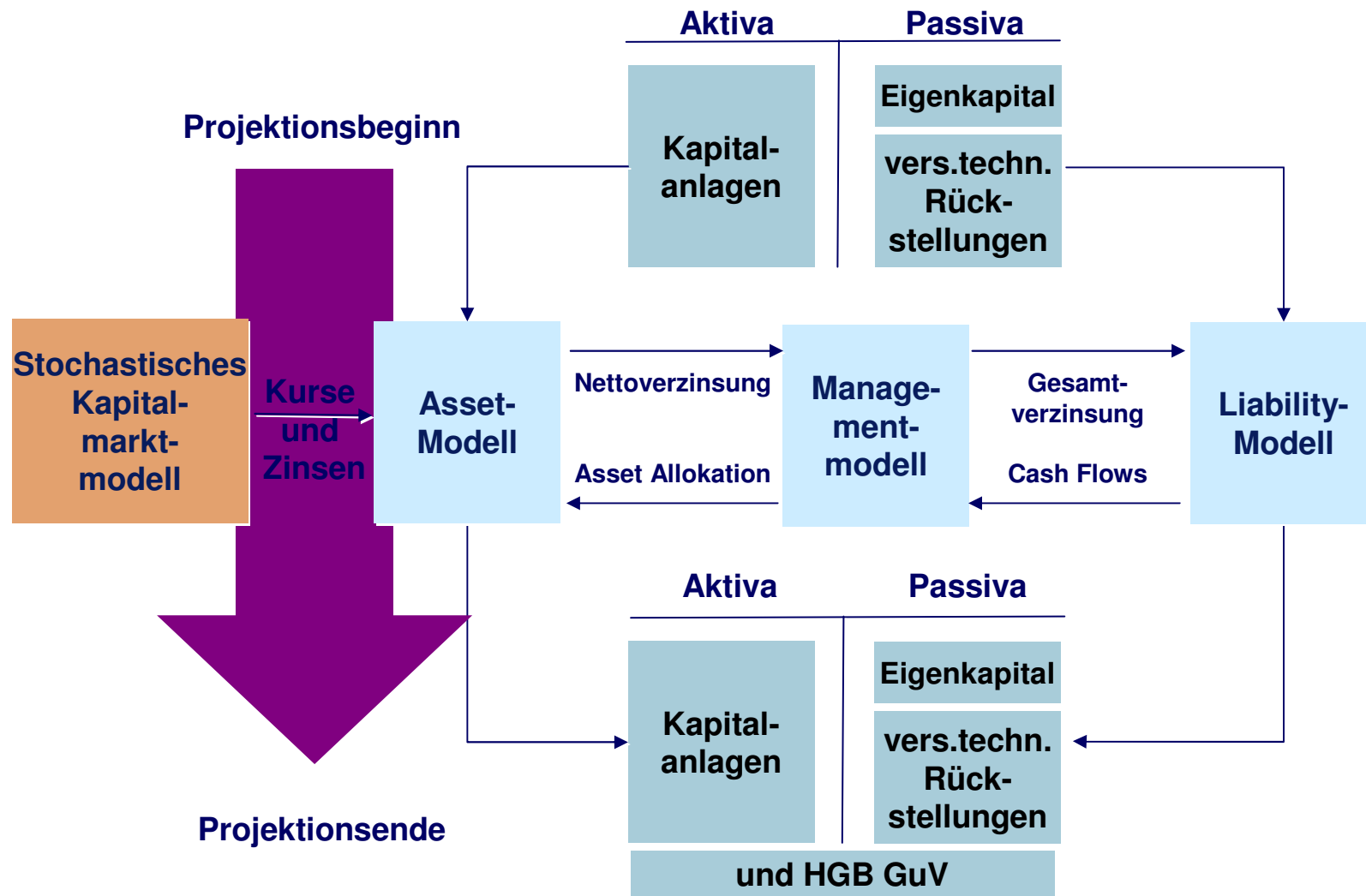


Einführung

Anwendungen stochastischer Modellierung

- Stochastisches ALM – Risikosteuerung
- Bewertung – EEV bzw. MCEV
- Solvency II – Economic Capital

Einführung - Modellaufbau

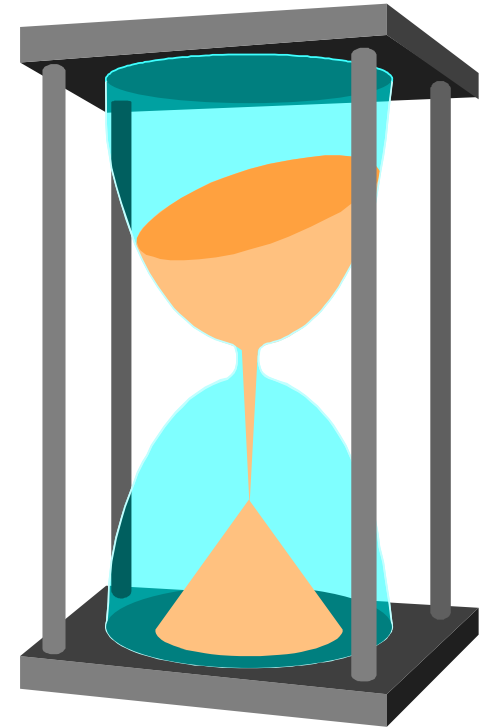


Einführung: ESG-Anforderungen

- Verwendbarkeit für ALM / MCEV / Solvency II**
- Verständlichkeit / Transparenz**
- Outputs für die „wichtigen“ Asset-Klassen**
- Erfassung verschiedener Marktentwicklungen
(z.B.: inverse Zinskurve)**
- Ansatz zur Cashflow-*Bewertung***
- Numerische Effizienz**

Agenda

1. **Einführung**
2. ***ESG-Eigenschaften***
3. **Grundzüge der Kalibrierung**
4. **ESG-Tests**
5. **Variance Reduction - Techniken**
6. **Ausblick**



ESG-Eigenschaften

- Arbitragefreiheit
- Marktkonsistenz
- Stochastische Bewertung der Cashflows
- Real World vs. Risikoneutral
- Mean Reversion
- Normale vs. Lognormale Zinsmodelle
- 1-Faktor vs. N-Faktor
- Konvergenzverhalten

Arbitragefreiheit

- ***Mehr Ertrag nur durch mehr Risiko („no free lunch“)***

- **Grundvoraussetzung für marktkonsistente Bewertung**

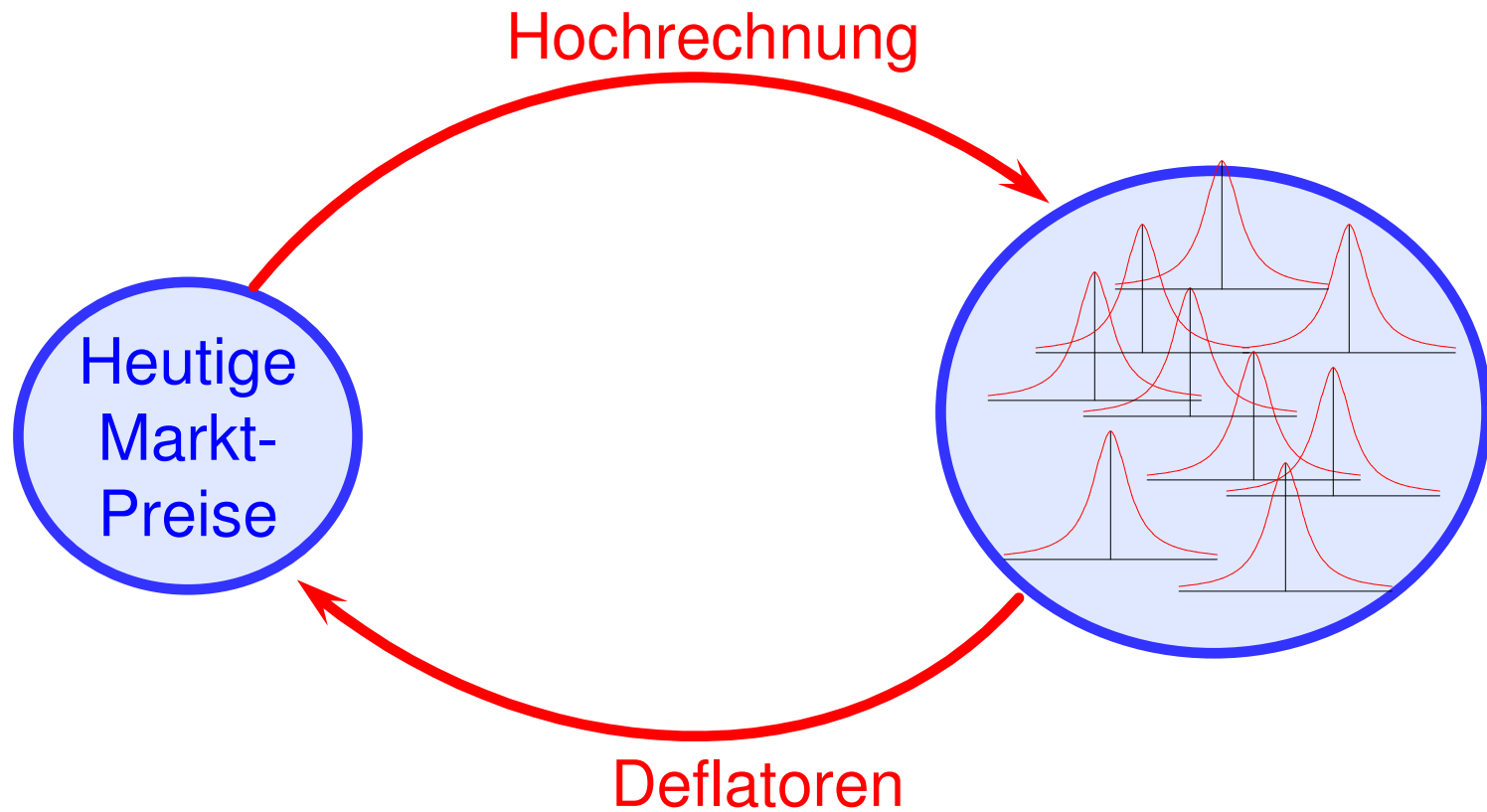
- **Bei ALM führt Arbitrage ggf. zu falschen Entscheidungen**
 - Beispiel: Optimale Aktienquote und Risikotragfähigkeit

Marktkonsistenz

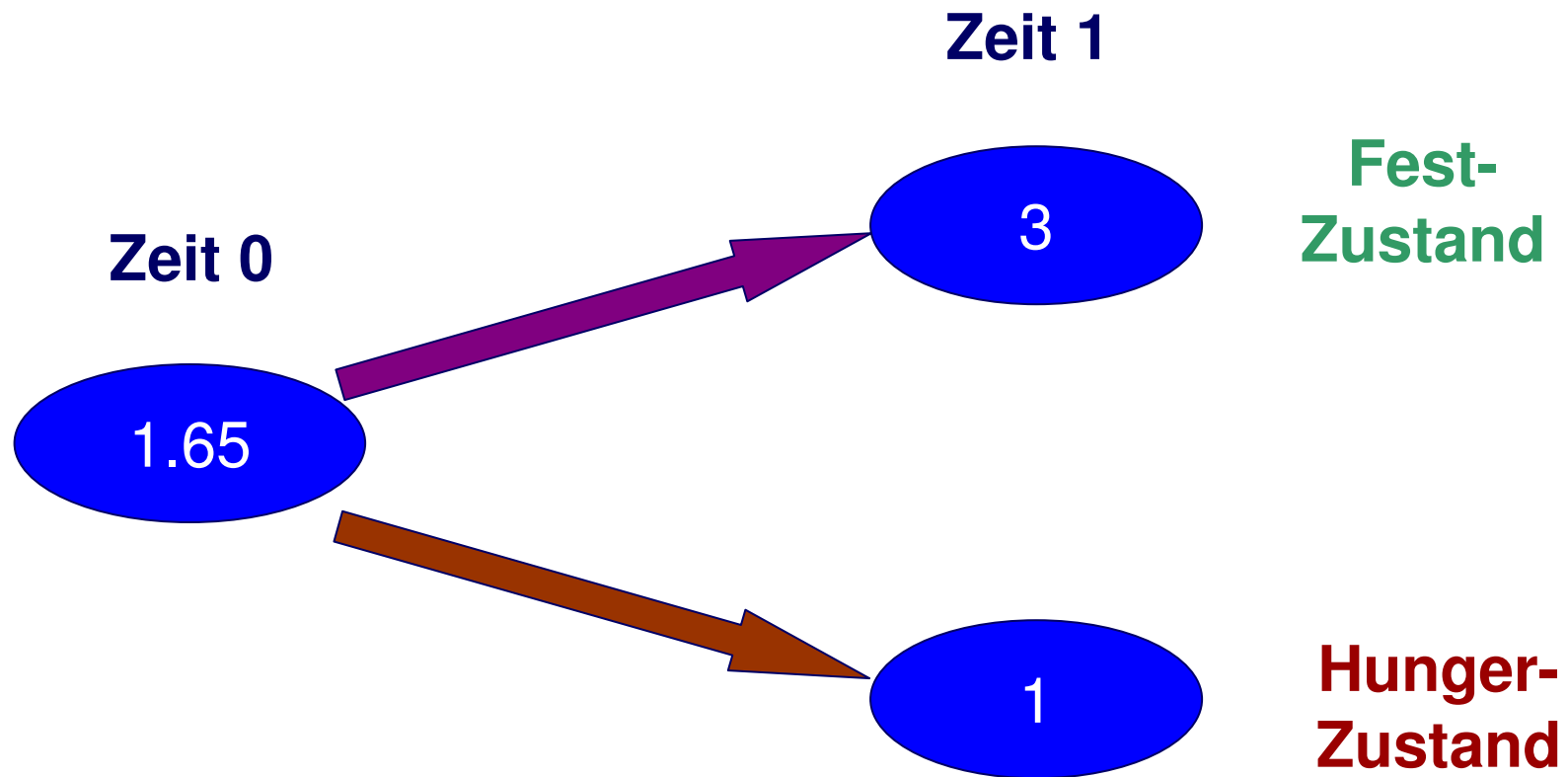
□ Korrektes Pricing der Kalibrierungsassets*

- Start-Zinskurve: ESG-Input, nicht Output
 - Volatilitäten: implizit
 - Korrelationen?
 - Risikoprämien?
-
- Mehr zu (*): Abschnitt „Kalibrierung“

Cashflow-Bewertung mit Deflatoren

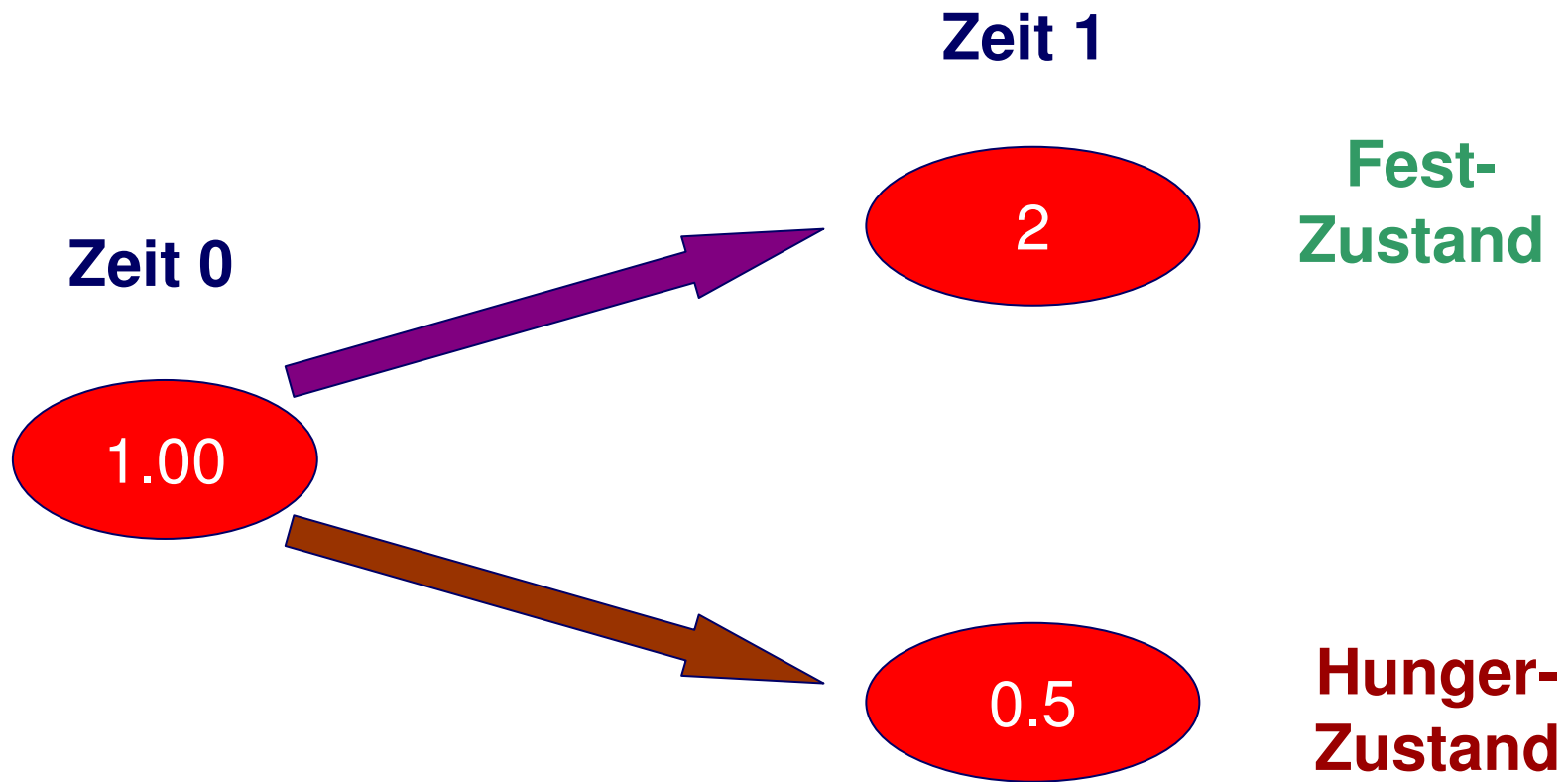


Betrachte die Blaue Aktie...

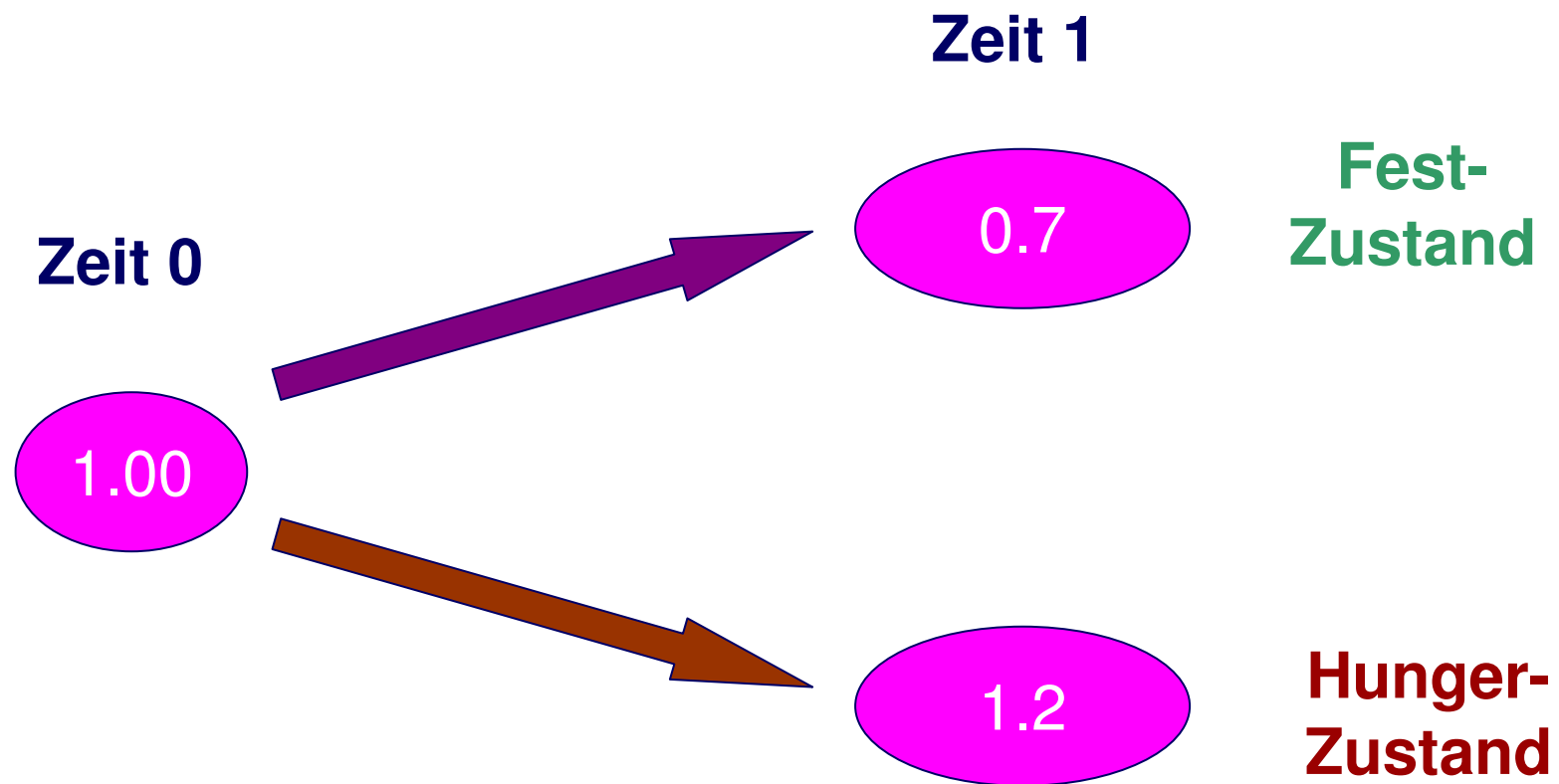


B&W Deloitte

... und die Rote Aktie



...und die dazugehörigen Deflatoren



B&W Deloitte

Bewertung mit Deflatoren (allg.)

$$P = E[D_t C_t]$$

Bewertung unserer “Basis-Aktien”

Szenario	<i>Blau</i>	<i>Rot</i>	<i>Deflator</i>	<i>Deflator * Cashflow</i>	<i>Deflator * Cashflow</i>
Fest	3	1.5	0.7	2.1	1.40
Hunger	1	0.5	1.2	1.2	0.6
Erwartung				1.65	1.00

Bewertung weiterer Titel

Szenario	Risiko-frei	Lila Aktie	Deflator	Deflator * Cashflow	Deflator * Cashflow
Fest	1	1.5	0.7	0.7	1.05
Hunger	1	0.5	1.2	1.2	0.6
Erwartung	1	1	0.95	0.95	0.825
Diskont				5.13%	19.4%

Vergleich: klassisch und modern

□ Klassisch:

$$P = E[v^t C_t]$$

Fester Diskontsatz

Abhängigkeit zwischen
Diskontsatz
& Cashflow

□ Modern:

$$P = E[D_t C_t]$$

Stochastischer
Diskont - Deflator

Unabhängigkeit zwischen
Diskontsatz & Cashflow

Risikoneutrale Bewertung

Ein bei Banken populärer Ansatz

Spezielle Wahrscheinlichkeiten

Keine Risikoprämien

Diskontierung mit der (pfadabhängigen) Short Rate

Real-World vs. Risikoneutral

Real-World

- Marktkonsistent: J
- Arbitragefrei: J
- Leicht verständlich: J
- Mehrwährungsfähig: J

Risikoneutral

- Marktkonsistent: J
- Arbitragefrei: J
- Leicht verständlich: N
- Mehrwährungsfähig: N

Spot, Forward and Short Rates

□ Spot rate

$$r(s, t) = -\frac{\ln P(s, t)}{t - s}$$

□ Forward rate

$$f(s, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln P(s, t)$$

□ Short rate

$$r(s) = \lim_{t \downarrow s} r(s, t) = \lim_{t \downarrow s} f(s, t)$$

Ansätze zur Zinsmodellierung

- **Short Rate-Modelle (z.B. Hull-White, CIR)**
- **Forward – Modelle (HJM)**
- **Marktmodelle (z.B. LIBOR Market)**

Ein paar Formeln...

- Hull-White
„normal“

$$dr_t = \sigma_t dW_t + \alpha(\mu_t - r_t)dt$$

- CIR

$$dr_t = \sigma_t \sqrt{r_t} dW_t + \alpha(\mu_t - r_t)dt$$

- BK
„lognormal“

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \alpha(\mu_t - X_t)dt,$$

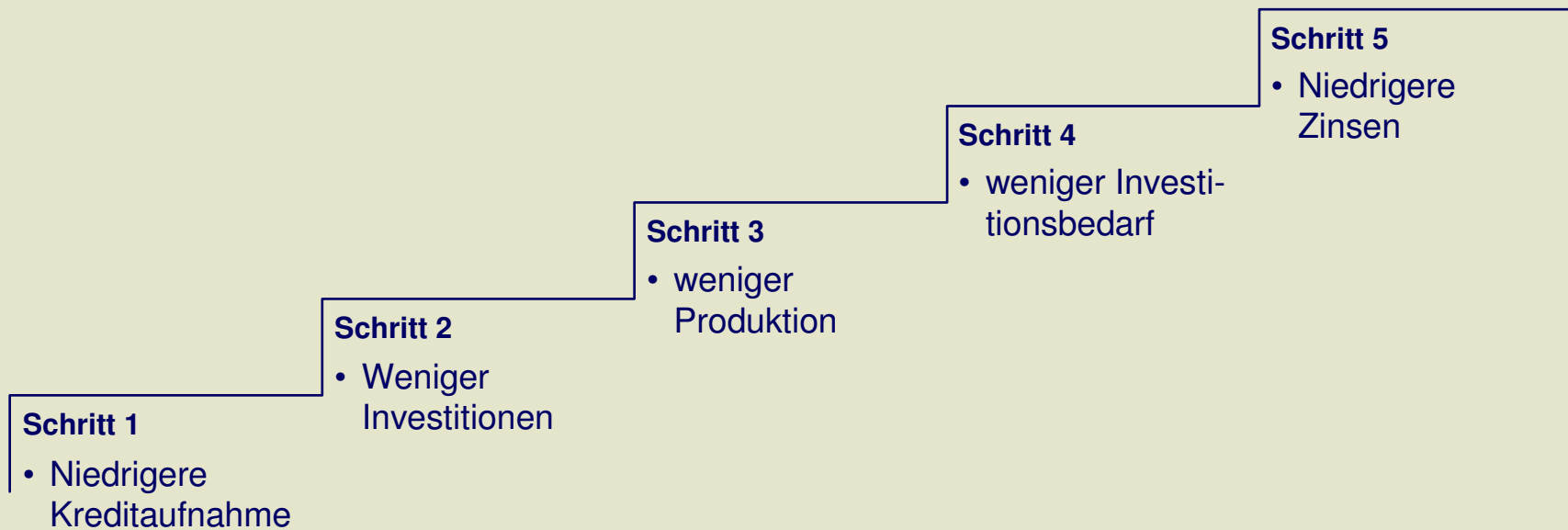
$$X_t = \ln r_t$$

Mean Reversion

- *Bewegung der Zinssätze zu einem „mittleren“ Wert hin*
- **in historischen Werten nachweisbar**
- **in den Marktpreisen berücksichtigt**
 - niedrige Zinsvolatilität für hohe Laufzeiten

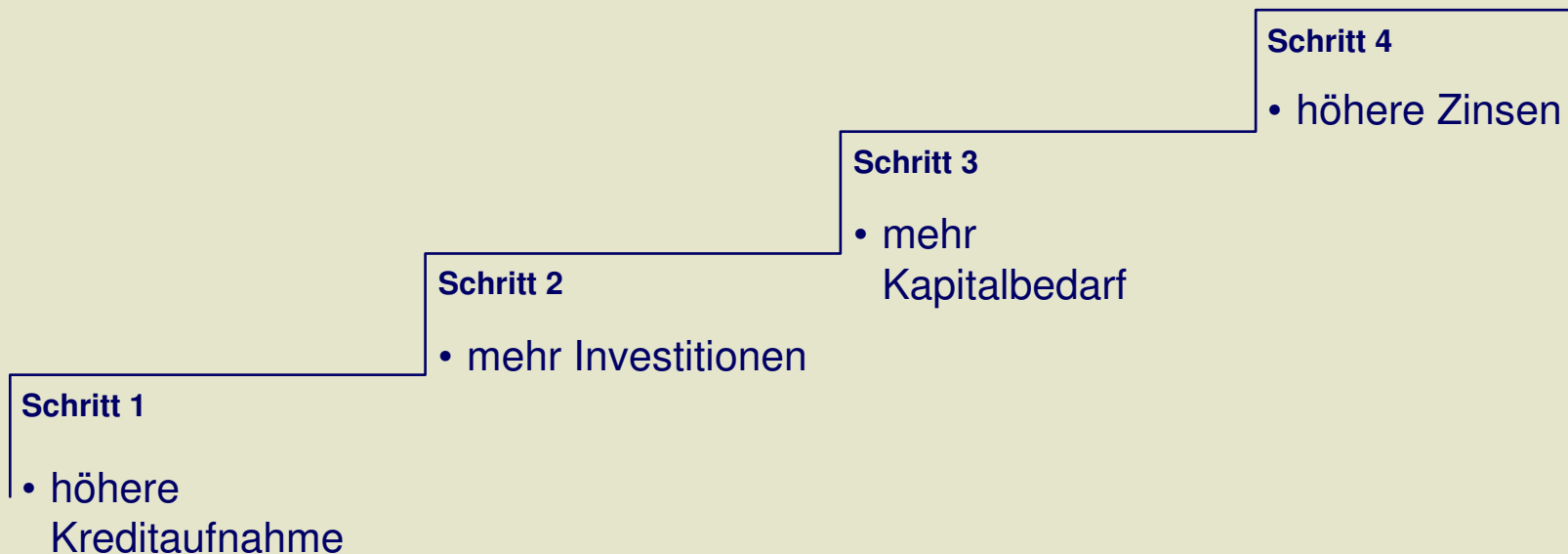
Mean Reversion: etwas Intuition...

Bei hohen Zinsen...



Mean Reversion: etwas Intuition...

Bei niedrigen Zinsen...



Normale Modelle

□ Pro

- „Closed Form“- Preise für Anleihen und Optionen
- Einfachheit der Kalibrierung

□ Contra

- Negative Zinsen möglich

Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

□ Pro

- „Closed Form“- Preise für Anleihen

□ Contra

- Schwer zu kalibrieren

Lognormale Modelle

□ Pro

- Implizit in Black's Cap&Floor-Formel

□ Contra

- Keine „Closed Form“-Preise für Anleihen
- Z.T. sehr hohe Zinssätze

1-Faktor-Modelle

Es wird eine Brownsche Bewegung verwendet

□ Pro

- Verständlichkeit
- Einfachheit der Kalibrierung

□ Contra

- Perfekte Korrelation der Zinsen für alle Laufzeiten

N-Faktor-Modelle

Es werden 2 oder mehr Brownsche Bewegungen verwendet

Pro

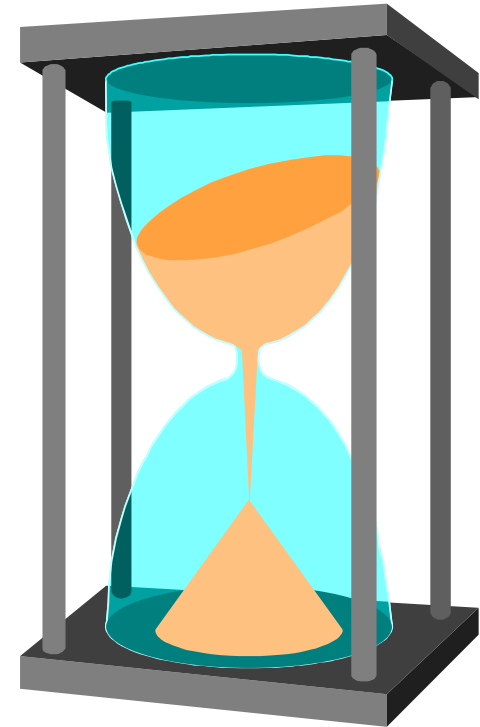
- „Twists“ der Zinskurve modellierbar

Contra

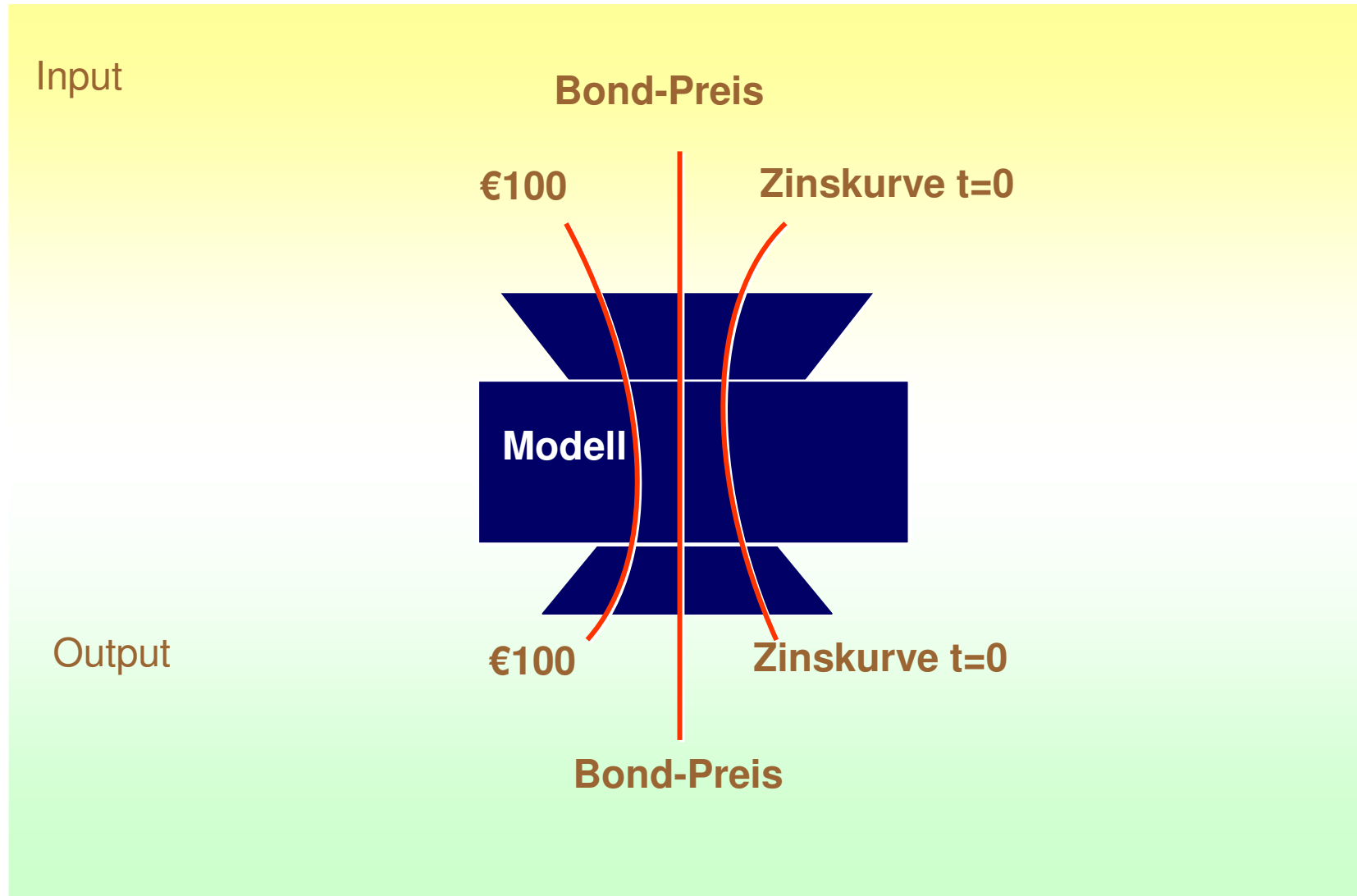
- Schwierigere Kalibrierung

Agenda

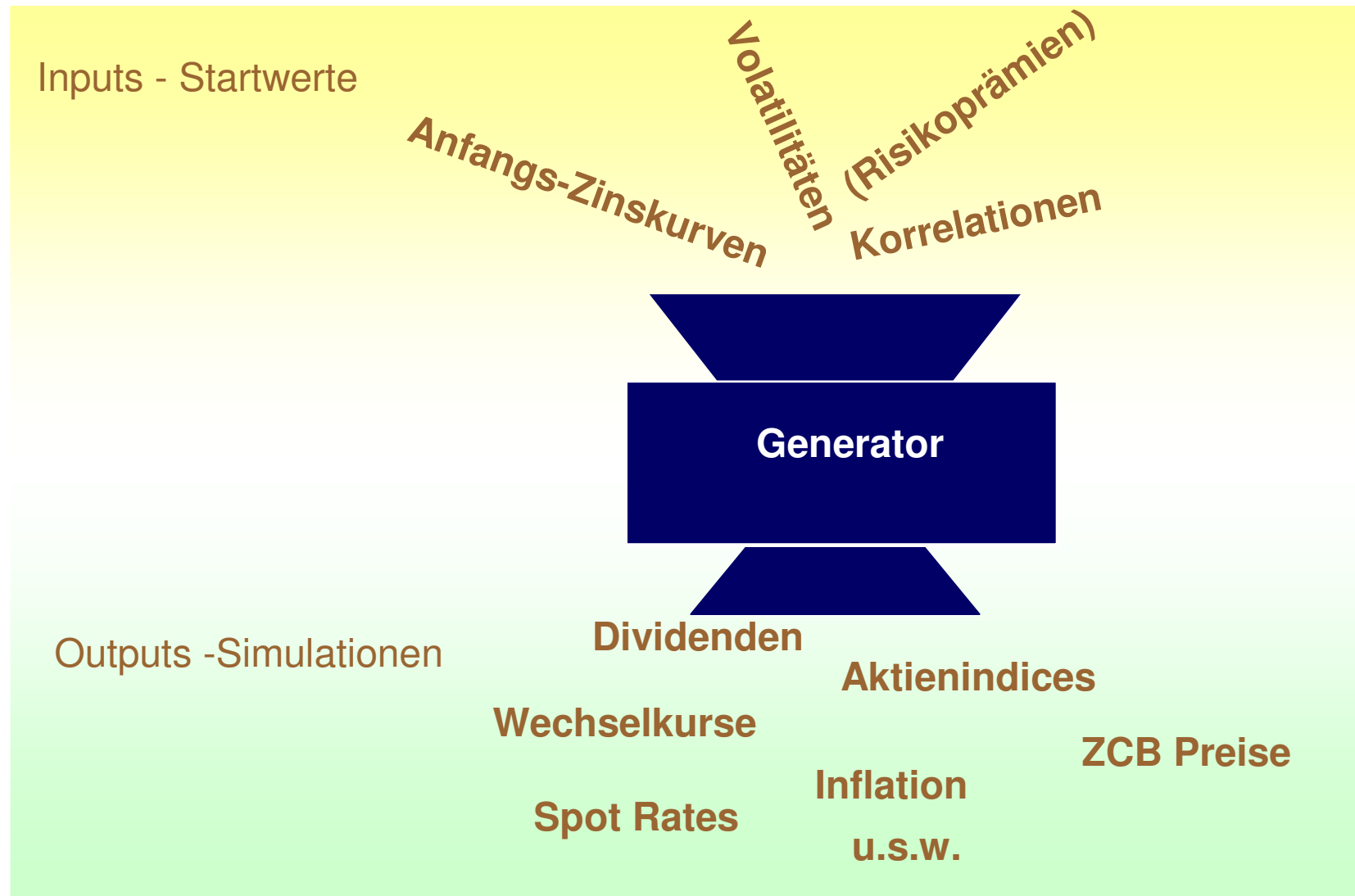
1. **Einführung**
2. **ESG-Eigenschaften**
3. ***Grundzüge der Kalibrierung***
4. **ESG-Tests**
5. **Variance Reduction - Techniken**
6. **Ausblick**



Kalibrierung – Einleitung (1)



Kalibrierung – Einleitung (2)

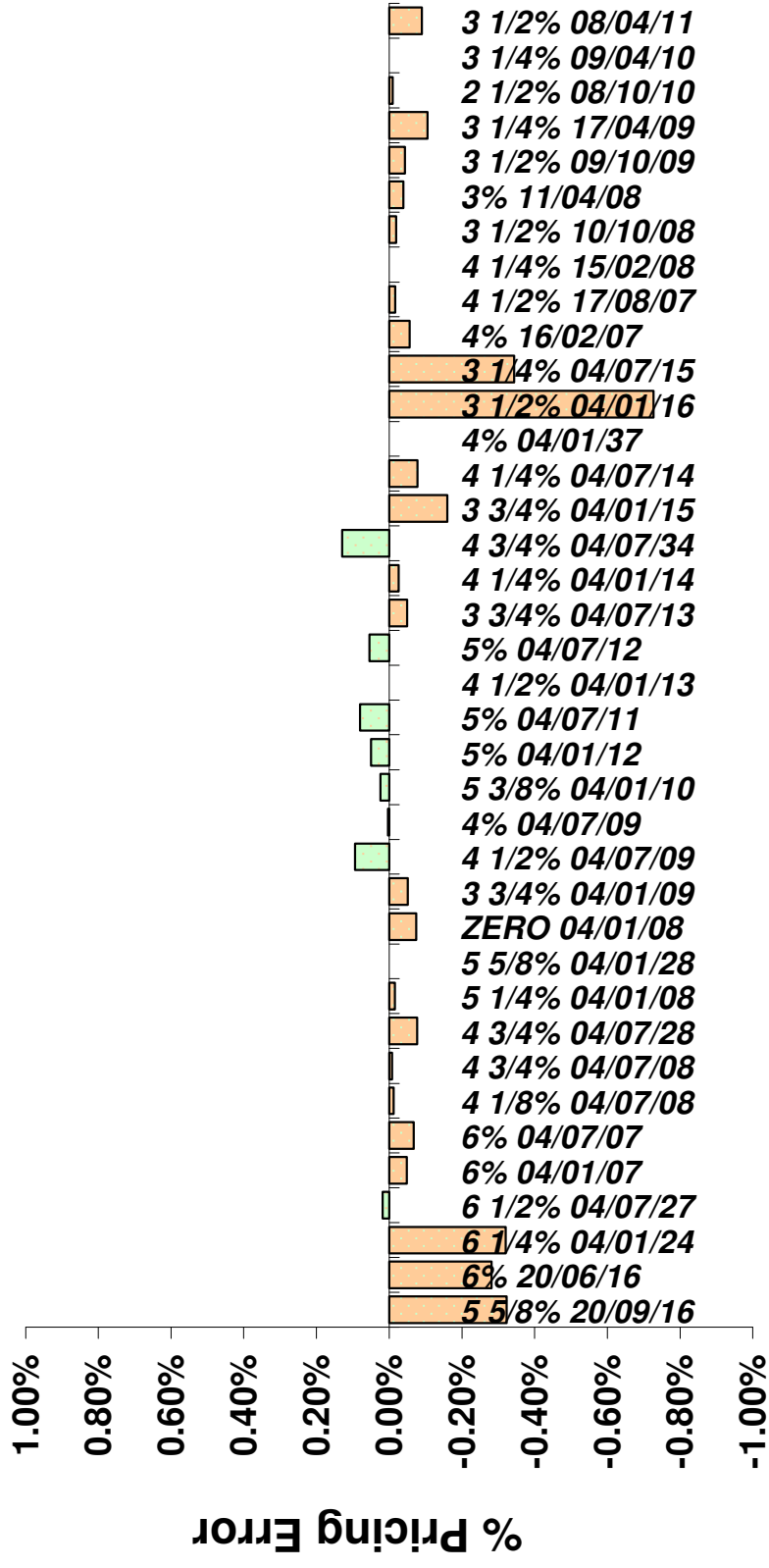


Nominal-Zinskurve

- Quelle (Bundesanleihen, Swaps, andere)**
- Eigenes Bondportfolio**
- Duration der Verpflichtungen**
- Verfügbare Bonds**
- Glattheit der gefitteten Zinskurve**
- Fit anderer Instrumente**

Beispiel

Goodness of Fit to German Government Bonds



Volatilitäten

- ❑ **Verwende Finanzinstrumente, in deren Bewertung die Volatilität eingeht**
- ❑ **Beispiele:**
 - **Floor / Cap**
 - **Swaptions**
 - **Put / Call Optionen**
- ❑ **Diese Instrumente können mit Black-Scholes- Formel bewertet werden**

Zinsvolatilitäten – Swaptions (1)

- ❑ **Swaption: Recht, zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Zinsswap einzugehen**
- ❑ **Bewertung mit Black-Formel:**

$$p(t, n) = \left(X N(-d_2) - F N(-d_1) \right) \sum_{k=1}^n P(0, t+k)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{F}{X}\right) + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

t: Optionslaufzeit

n: Swaplaufzeit

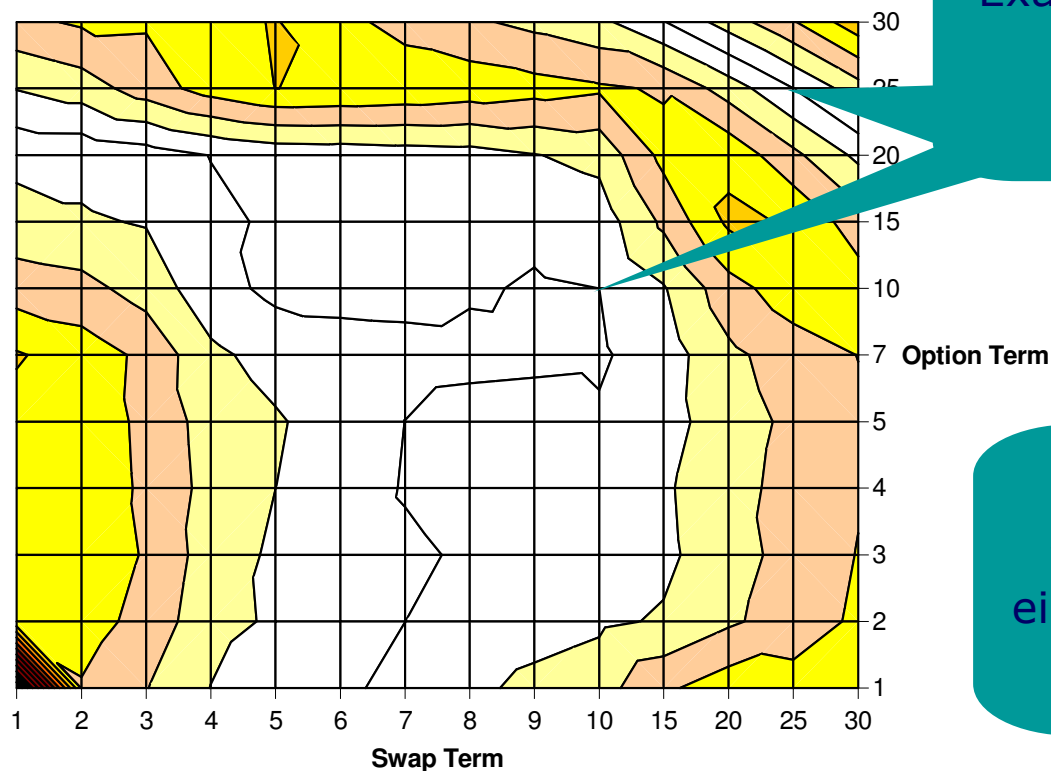
X: Strike

F: Forward Swap Rate

$P(0, t+k)$: $t+k$ -jahres ZCB Preis zur Zeit 0

Zinsvolatilitäten – Swaptions (2)

Goodness of Fit



Exakter Fit zu zwei Punkten der Volatilitäts-Oberfläche

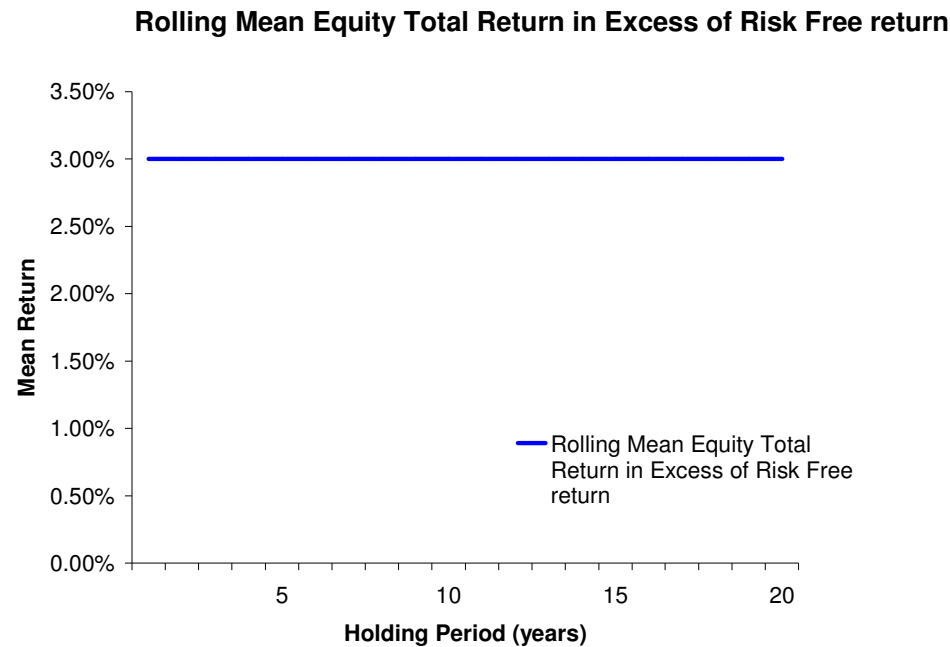
Wenn wir diese zwei Punkte geschickt wählen, erhalten wir einen guten Fit über die ganze Swaption-Oberfläche

Korrelationen

- Bestimmt aus historischen Zeitreihen**
- Beachte Konsistenz der Zeitreihen**
- Beispiel: 10 Jahre, wöchentliche Daten**

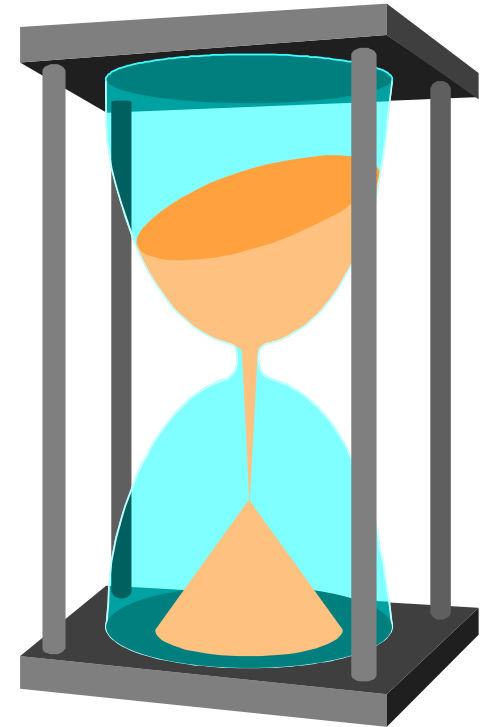
Risikoprämien

- Erwarteter Ertrag über dem risikofreien Zins
- Beispiel: Risikoprämie auf Aktien-Return



Agenda

1. Einführung
2. ESG-Eigenschaften
3. Grundzüge der Kalibrierung
4. *ESG-Tests*
5. Variance Reduction - Techniken
6. Ausblick

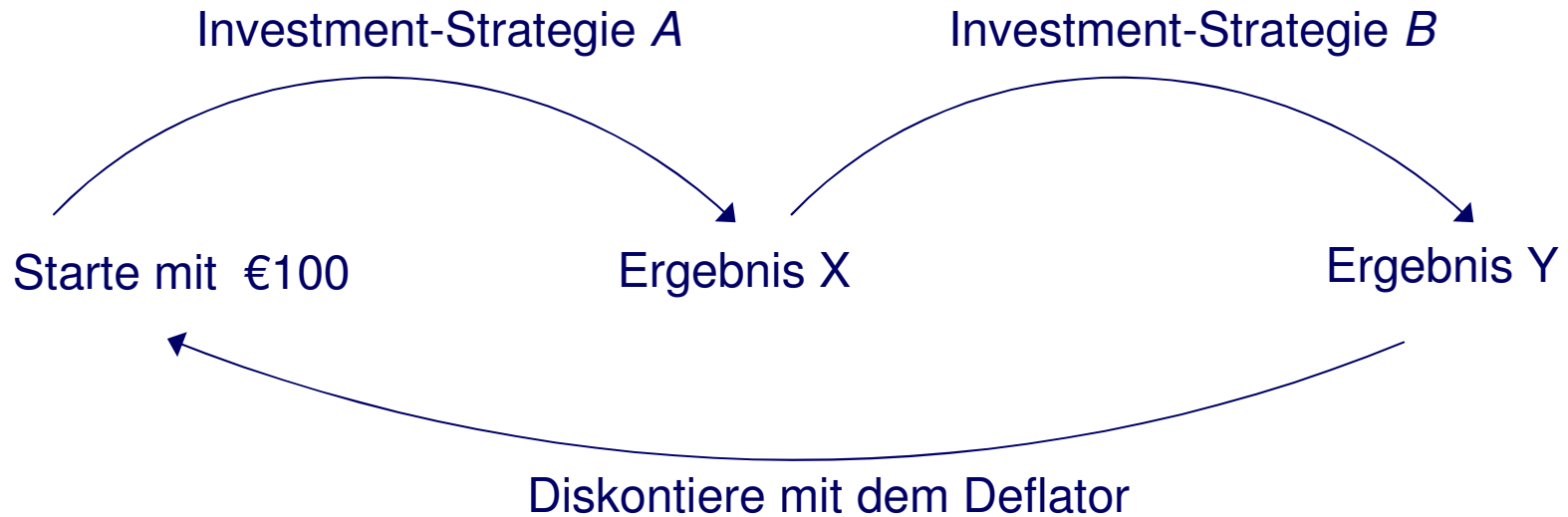


1 = 1 - Test

- ❑ Investiere EUR 100 in Aktien bzw. Anleihen
- ❑ Berechne den Wert in N Jahren (für alle Pfade)
- ❑ Bewerte jedes Ergebnis (abdiskontieren)
- ❑ Bilde den Erwartungswert

- ❑ Wie hoch sollte er sein?
 - *EUR 100, unabhängig von künftigen Entwicklungen!*

1 = 1 = 1 – Test



1 = 1 = 1 - Test

- Auch dieser Test soll EUR 100 ergeben

- Härter als der 1=1 – Test
 - Investmentstrategien beliebig wählbar
 - ESG-Produzent kennt sie nicht 😊

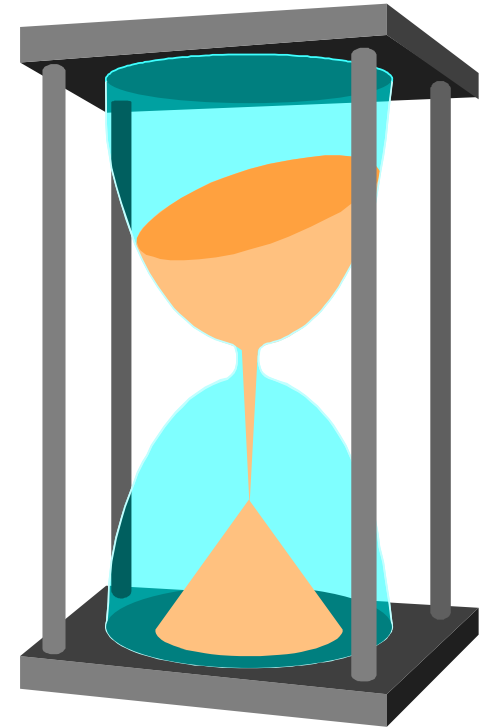
Weitere Test-Ansätze

- **Passen ESG-Outputs zu den Inputs?**
 - **z.B. Volatilitäten, Risikoprämien**

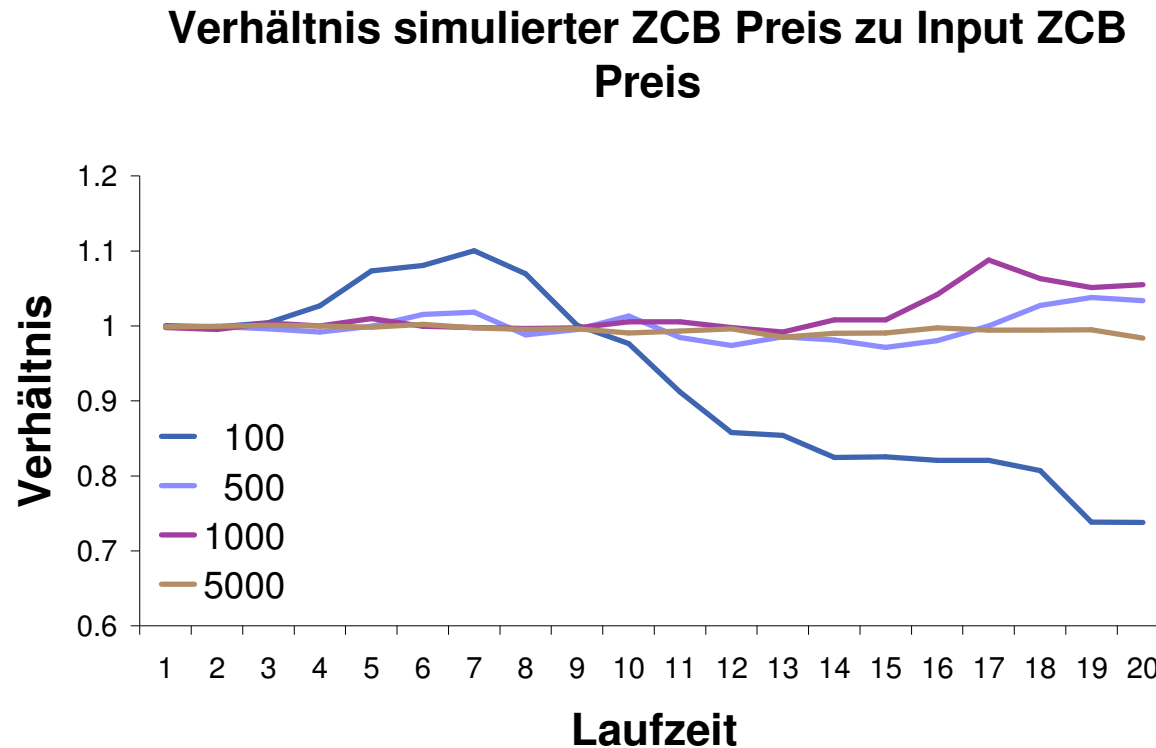
- **Sind ESG-Outputs „plausibel“?**

Agenda

1. Einführung
2. ESG-Eigenschaften
3. Grundzüge der Kalibrierung
4. ESG-Tests
5. *Variance Reduction - Techniken*
6. Ausblick



Varianzreduktion – warum?



**Herausforderung: Kleine Anzahl Simulationen
aber genaue Schätzwerte für bekannte Größen**

Ansätze zur Varianzreduktion

- Mehr Simulationen
- Importance Sampling
- Control Variates

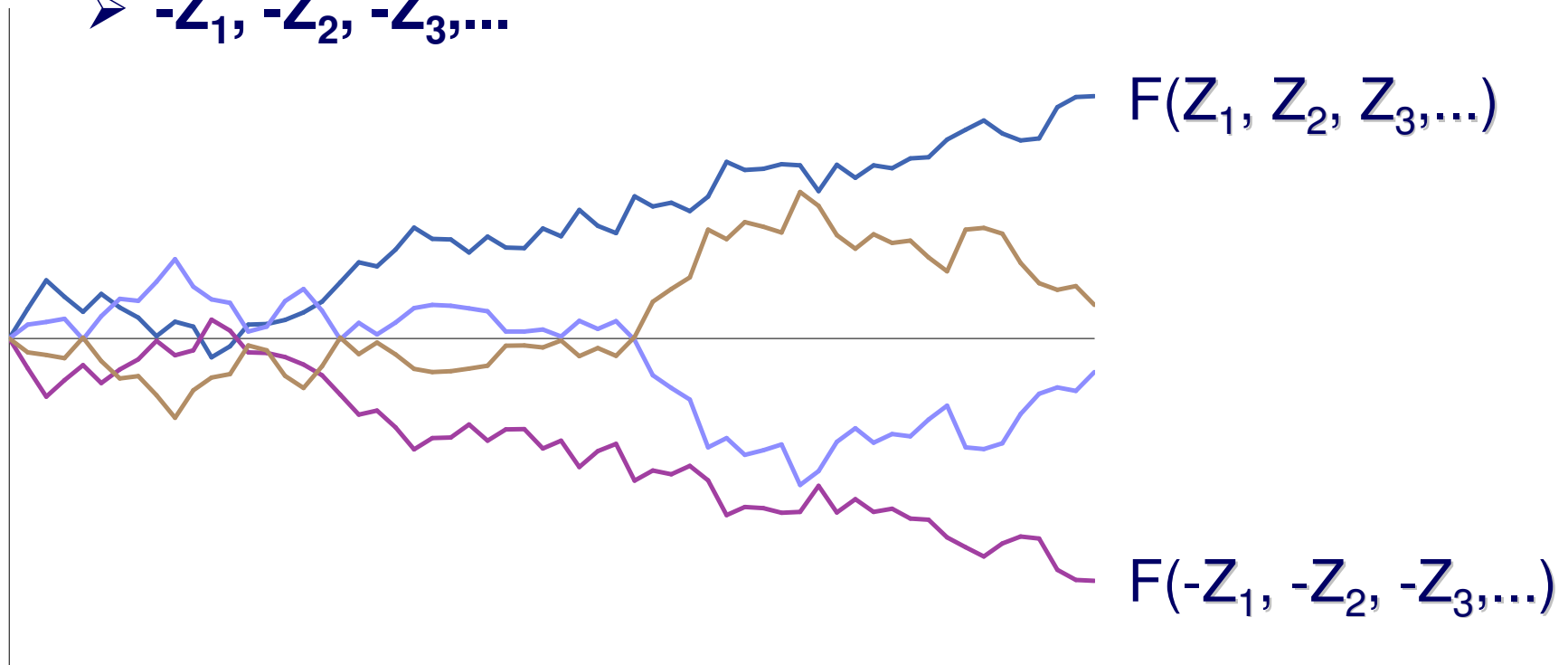
- Antithetische Variablen
- Renormalisierung

Antithetische Variablen

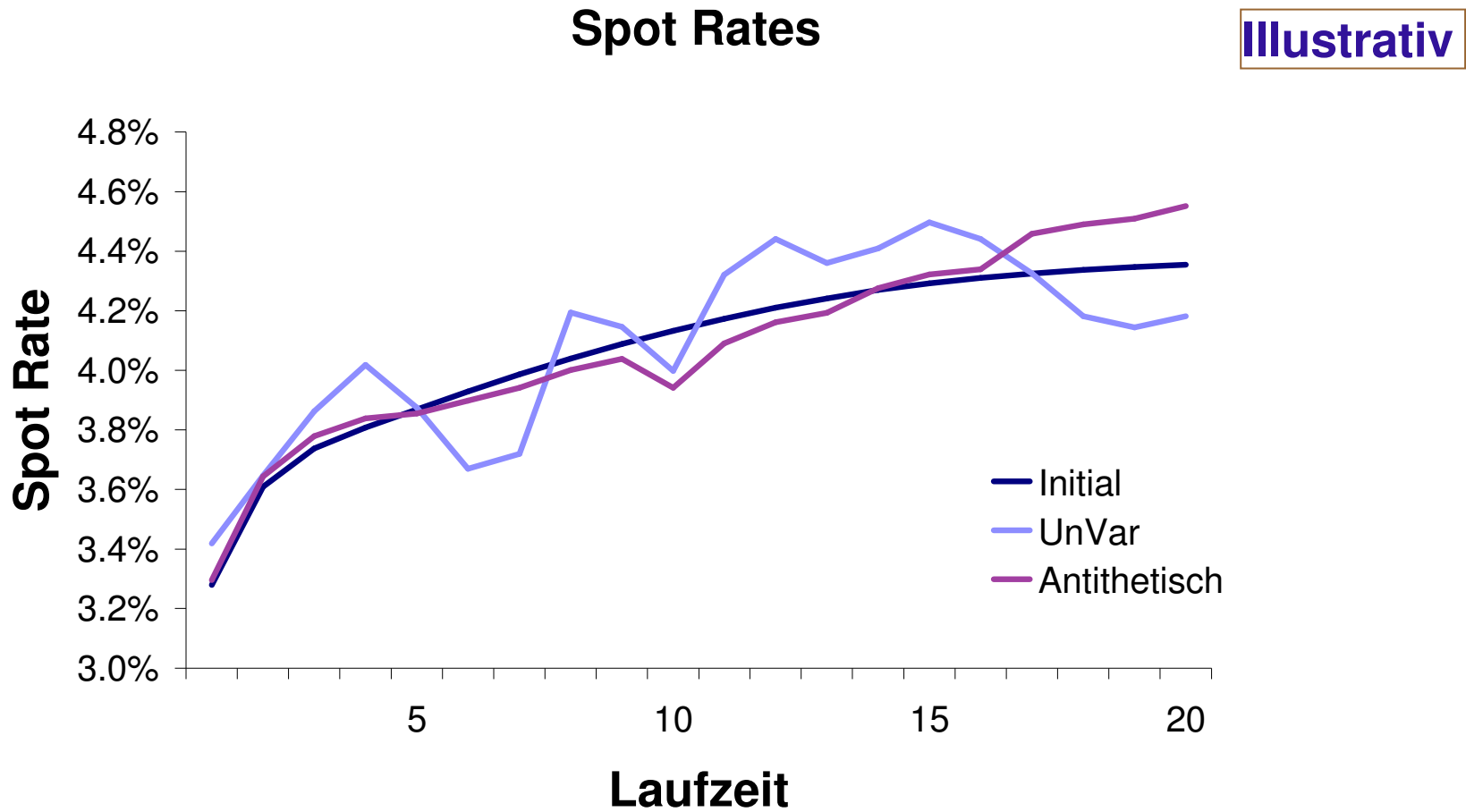
□ Erzeuge gleichzeitig zwei Pfade

➤ Z_1, Z_2, Z_3, \dots

➤ $-Z_1, -Z_2, -Z_3, \dots$



Wirkung Antithetischer Variablen



Renormalisierung

- **Idee: Skalierung der Simulationen, um den Sampling Error zu verringern**

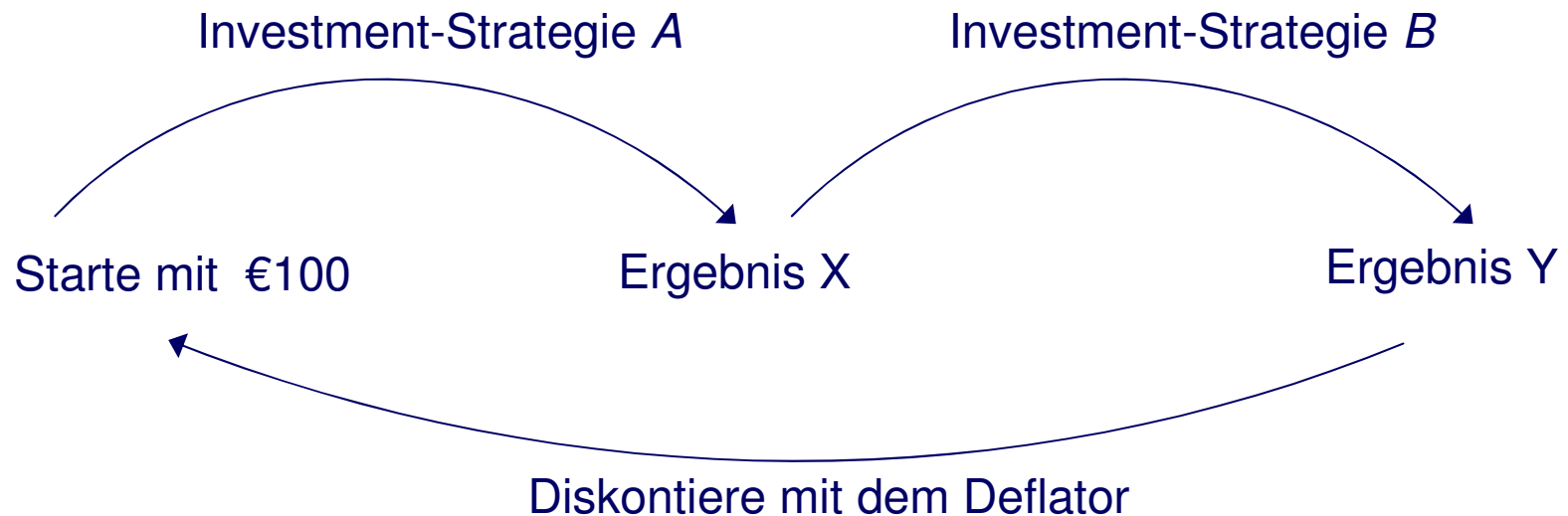
- **Wähle eine Zufallsvariable, für die der theoretische Erwartungswert bekannt ist**
- **Skaliere die Beobachtungen für alle Simulationen, s.d. der beobachtete Durchschnitt gleich dem theoretischen Erwartungswert**

Renormalisierung

Beispiel:

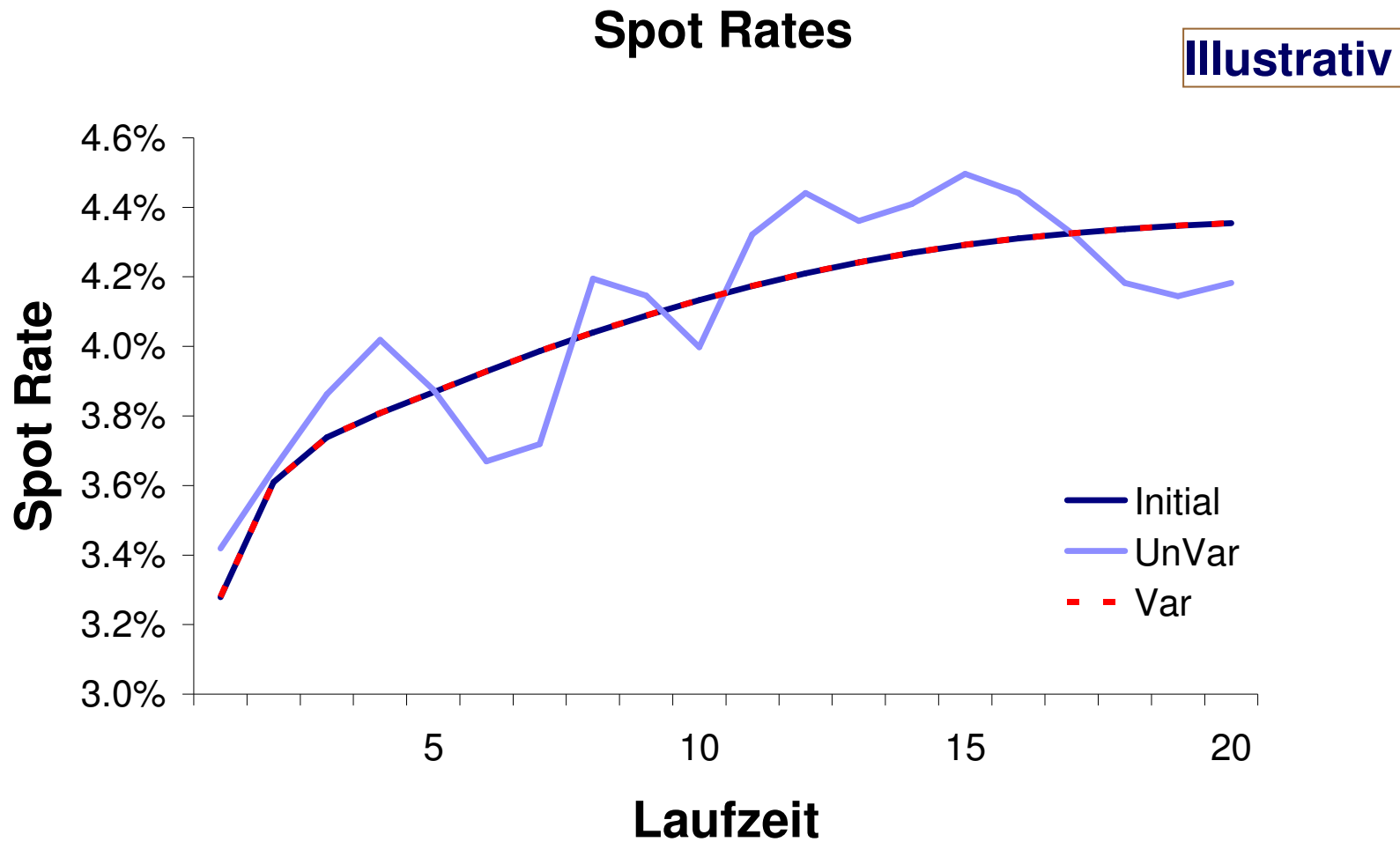
- Wir haben 100 Preise zu kalibrieren...**
- ...und verwenden 100 Simulationen**
- Genau die Anzahl Simulationen, um die Preise zu fitten**
- Gibt das eine realistische Bewertung der Verpflichtungen?**

Wiederholung: $1 = 1 = 1 - \text{Test}$



Weil a und b beliebig sind, kann dieser Test nicht so einfach ausgedrückt werden!

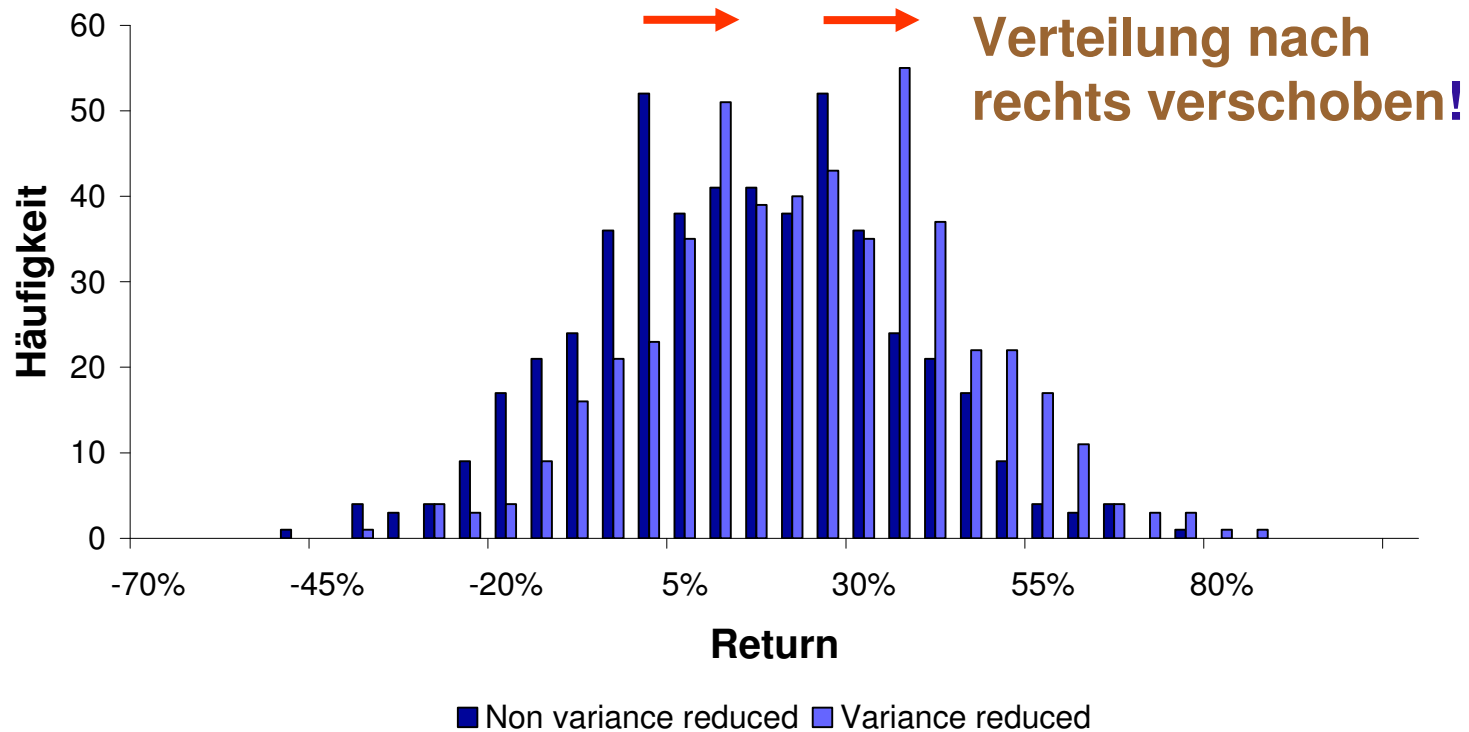
Wirkung der Renormalisierung



Einfluß auf Return-Verteilung

Illustrativ

Histogramm des Aktienreturns



Exkurs: Sharpe-Ratio

□ Definition:

$$S = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

μ : Erwarteter Return

r : Risikofreier Return

Überrendite pro Einheit Risiko

- Hoher (positiver) Wert: gute Wertentwicklung im Vergleich zur risikolosen Anlage

Renormalisierung: Pro und Contra

Vorteile:

- **Simulationen erfüllen die Martingaltests**
- **Simulationen passen zur Anfangs-Zinskurve exakt**

Nachteil: Verteilung von nicht-deflatierten Cashflows kann beeinflusst werden

In der Regel verwendet für Bewertungen

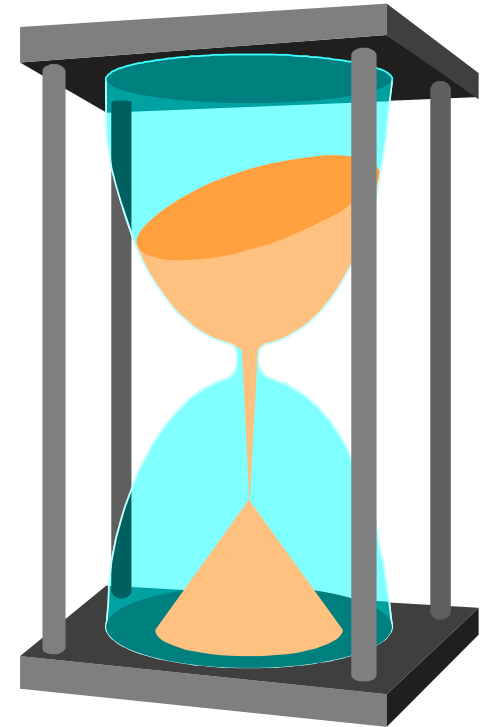
Die negativen Effekte sind geringer falls MSR klein

Varianzreduktion: Fazit

- Antithetische Variablen – stets zu empfehlen**
- Renormalisierung – gut bei Bewertungen**
- Bei Real World Simulationen – beachte MSR!**

Agenda

1. **Einführung**
2. **ESG-Eigenschaften**
3. **Grundzüge der Kalibrierung**
4. **ESG-Tests**
5. **Variance Reduction - Techniken**
6. ***Ausblick***



Literaturangaben

- **M.Baxter, A.Rennie „Financial Calculus“**
- **S.Jarvis, F.Southall, E.Varnell „Modern Valuation Techniques“**
- **J.Exley, S.Mehta, A.Smith „Mean Reversion“**

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Ihre Ansprechpartner:

0221 973 240

(B&W Deloitte in Köln)

0044 207 303 58 52

(Deloitte Capital Markets Group in London)

B&W Deloitte