Modellrisiko von Sterbetafeln

Risikodifferenzierung und bestandseigene Tafeln

Vortrag beim q_x-Club Köln/Bonn/Düsseldorf

Kai Kaufhold, Ad Res Advanced Reinsurance Services GmbH
1. Juli 2014

Vortragender

Kai Kaufhold:

- 1996: Agrippina Rück, Köln
- 2000: Manulife Reinsurance, Toronto
- 2003: Manulife Reinsurance, Köln
- 2011: Ad Res Advanced Reinsurance Services GmbH
- 2013: Gemeinsames Projekt mit LONGEVITAS

  Bestandseigene Sterbetafeln für Rentnerbestand

Übersicht

1. Wieso Modellrisiko?
2. Fallstudie: ZVK Leistungsempfänger
3. Bootstrapping als empirische Methode
4. Fallstudie: Teilbestand
5. Fazit

Modellrisiko

Warum müssen wir uns darum kümmern?

Gesetzliche Vorgaben:

- VAG §64a, MaRisk (VA)

<u>BaFin Rundschreiben 3/2009: Punkt 7.3.2.2 Unternummer 2:</u>

„ … Grundsätzlich sind geeignete **Zufallsvariable** und die entsprechenden **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** zu bestimmen. Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsfunktion ist die Verteilung der Zufallsvariablen aus **Vergangenheitsdaten** zu bestimmen. *Die Hintergründe für die Einschätzung sind auf Nachfrage zu erläutern.* …“

Modellrisiko

Warum müssen wir uns darum kümmern?

Drastische Präzedenzfälle in anderen Bereichen

- **Stürme**: Katrina, Wilma, Rita
- **Finanzkrise**: Kredit-, Zins-, Liquiditäts- und Aktienrisiko

Modellrisiko

Definition und Messung

Finanzielle Auswirkungen der Modellwahl

- Theorie: Maß auf dem Raum aller möglichen Modelle
- Praxis:
  - Stichprobe aus den „sinnvollen" Modellen
  - Kalibrierung an relevanten Daten
  - Aussagen über Vorhersagekraft

Modellrisiko

Generelle Überlegungen zu Sterbetafeln

Modellanforderungen:

- Glättung der Rohdaten und dabei Strukturen erhalten
- Extrapolation
- Risikofaktoren können altersabhängig sein.
- Welche Risikofaktoren? Multivariate Analyse notwendig.
- Wieviele Daten reichen?

Bestandsanalyse

Leistungsempfänger Zusatzversorgung

Fallstudie: Leistungsempfänger öffentlich-rechtlicher Zusatzversorgungskassen

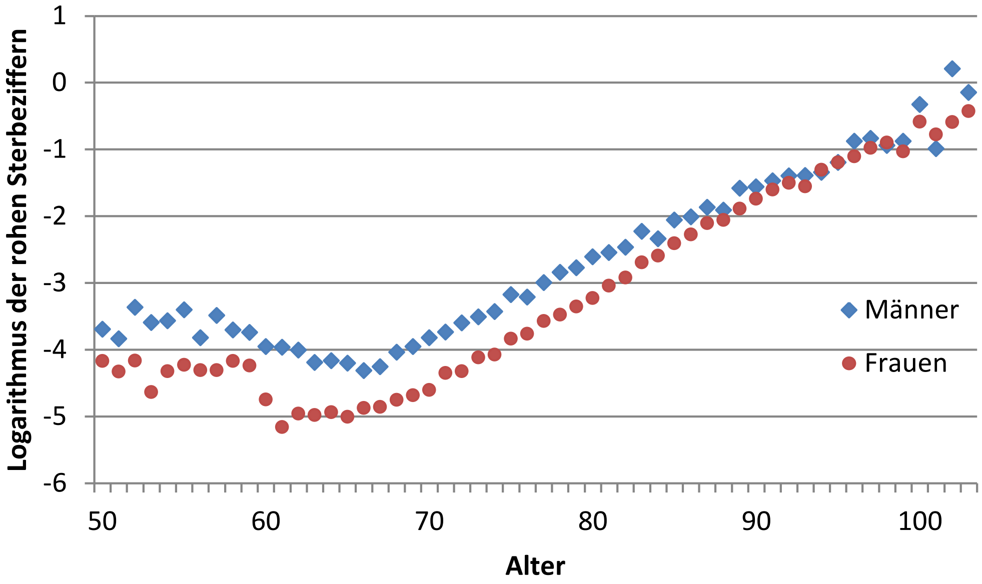
- 253.444 Datensätze
- 31.842 beobachtete Todesfälle im Zeitraum 2007-2011
- 1,03 Millionen verlebte Jahre (Verweildauer)

Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Bestandsanalyse

Leistungsempfänger Zusatzversorgung

Rohe Sterbeziffern nach Geschlecht



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Beobachtungen:

- Für Alter 70 – 95 log-linear
- ab Alter 100 wenig Daten
- Differenz altersabhängig
- Nicht-lineare Struktur für Alter 50 – 65

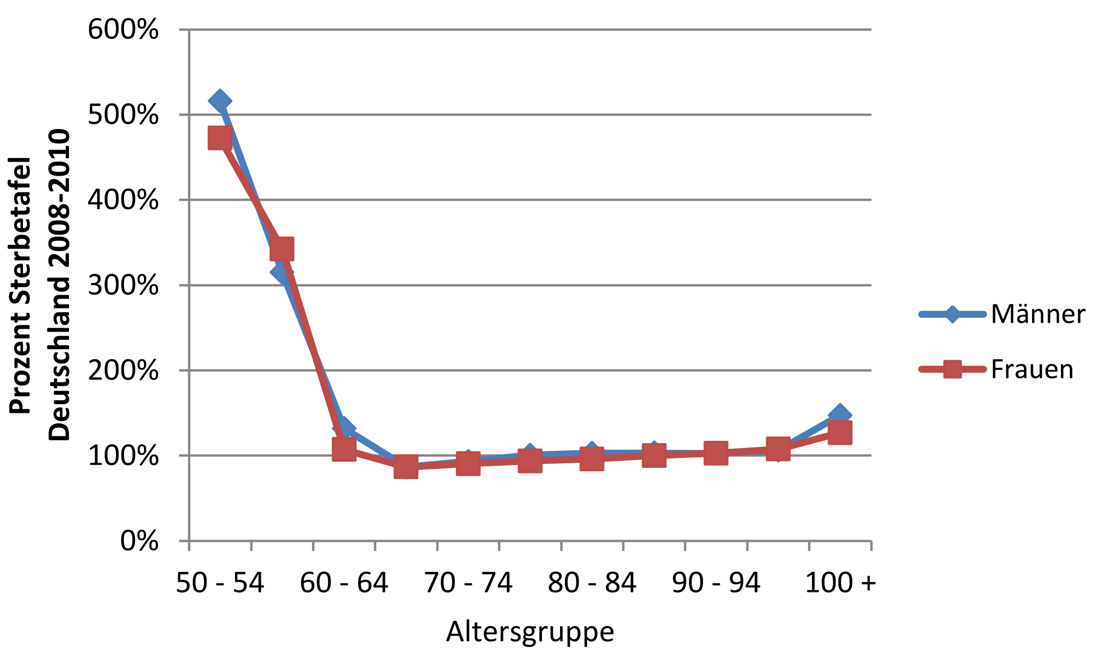
LONGEVITAS

AdRes

Gegenbeispiel

Leistungsempfänger Zusatzversorgung

Vergleich mit Bevölkerungstafel



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Beobachtungen:

- Männer 101.8%
- Frauen 99.3%

Im Mittel überraschend gut!

- **Aber: Erwerbsminderung!**

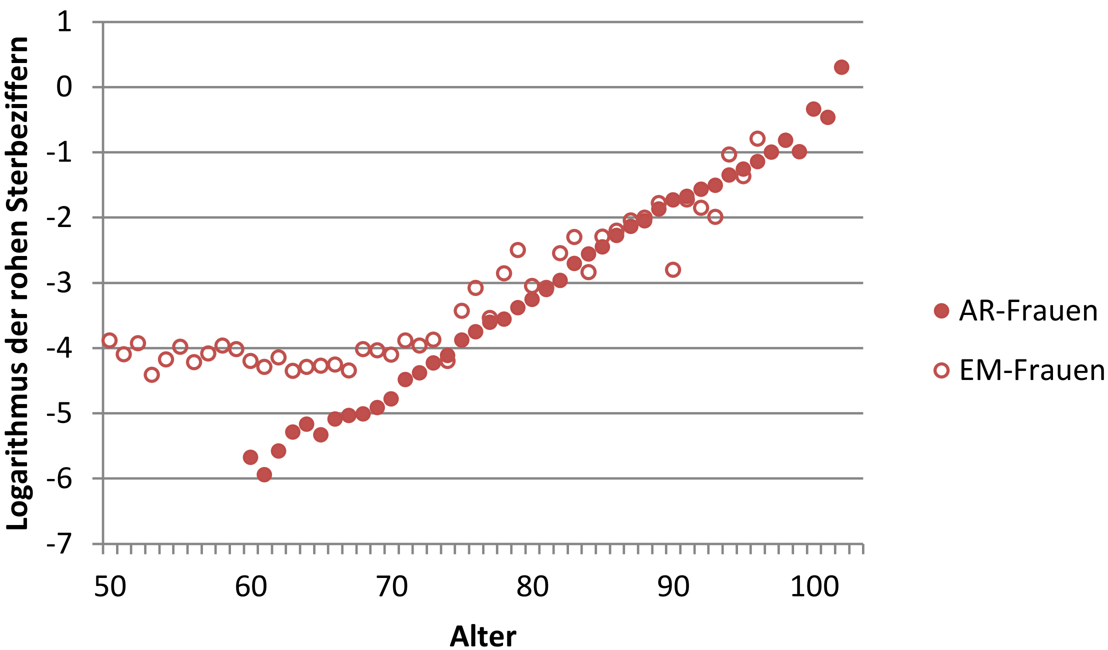
LONGEVITAS

AdRes

Bestandsanalyse

Leistungsempfänger Zusatzversorgung

Rohe Sterbeziffern (Frauen)



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Beobachtungen:

- Erwerbsminderung → konstante Raten bis Alter 75
- Ab Alter 80 kaum zu unterscheiden

LONGEVITAS

Ad Res

Bestandsanalyse

Leistungsempfänger Zusatzversorgung

Erste Schlussfolgerungen:

- Modell muss Zustand (Altersrente oder Erwerbsminderung) berücksichtigen
- Bevölkerungstafel nicht angemessen
- Differenz zwischen Risikogruppen stark altersabhängig

Bestandsanalyse

Leistungsempfänger Zusatzversorgung

Sterbetafel für Zusatzversorgungen

- Risikomerkmale:
  - Alter, Geschlecht
  - Zustand (Altersrentner, Erwerbsminderungsrentner, Hinterbliebene)
- Datenvolumen erlaubt traditionelle Herleitung
- *Konsistenz mit Daten?*
- Statistisches Modell erleichtert die Analyse

Survivalanalyse

Iterative Vorgehen zur Modelloptimierung

1. Modell-Annahme über Parametrisierung der *Hazardrate* μ_x

$$\theta = (\alpha, \beta, \epsilon, \dots) \longmapsto \mu_x = \mu_x(\theta)$$

Zum Beispiel: $\mu_x = \frac{e^{\epsilon} + e^{\alpha+\beta x}}{1 + e^{\alpha+\beta x}}$ (*Makeham-Perks*)

2. Parameterschätzung für $\mu_x = \mu_x(\theta)$, mittels *Maximum-Likelihood der Verweildauer*.

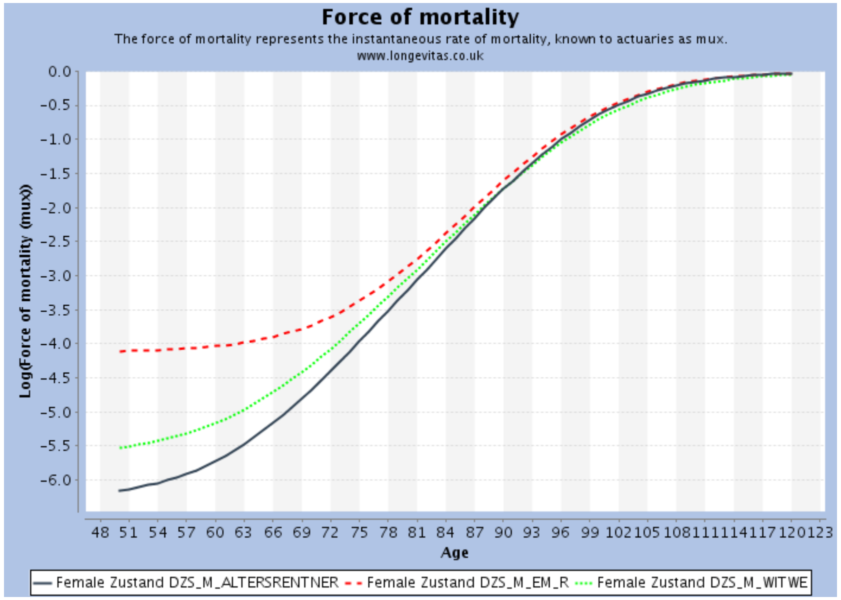
3. Überprüfung des Modells mittels Anpassungstests

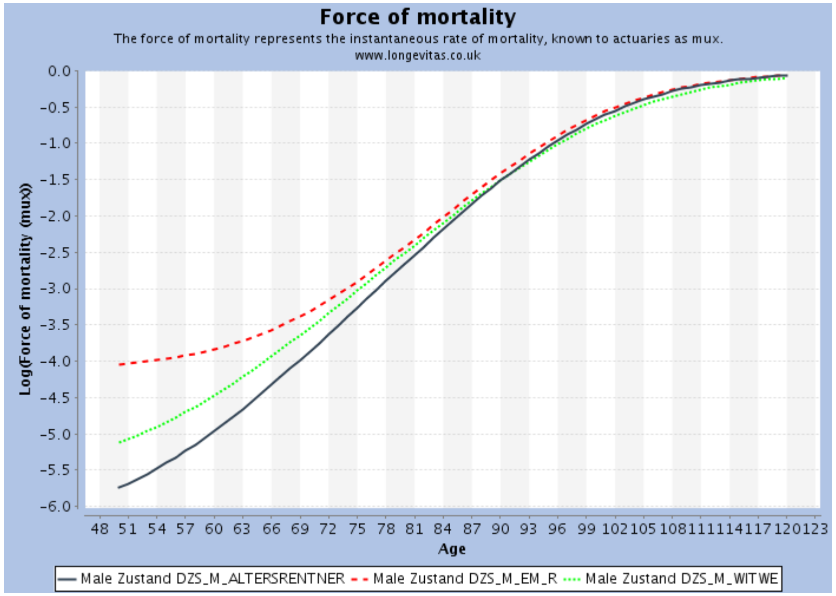
4. Iterative Verbesserung des Modells (z.B. Nach Akaike Informations-Kriterium, „AIC“)

Survivalanalyse

Vorläufige Ergebnisse

Sterbeintensität (nach Zustand)





Parametrisierung des Zustands: $\epsilon_i = \epsilon_0 + \epsilon_{EM} Z_{i,EM} + \epsilon_{Witwe} Z_{i,Witwe}$

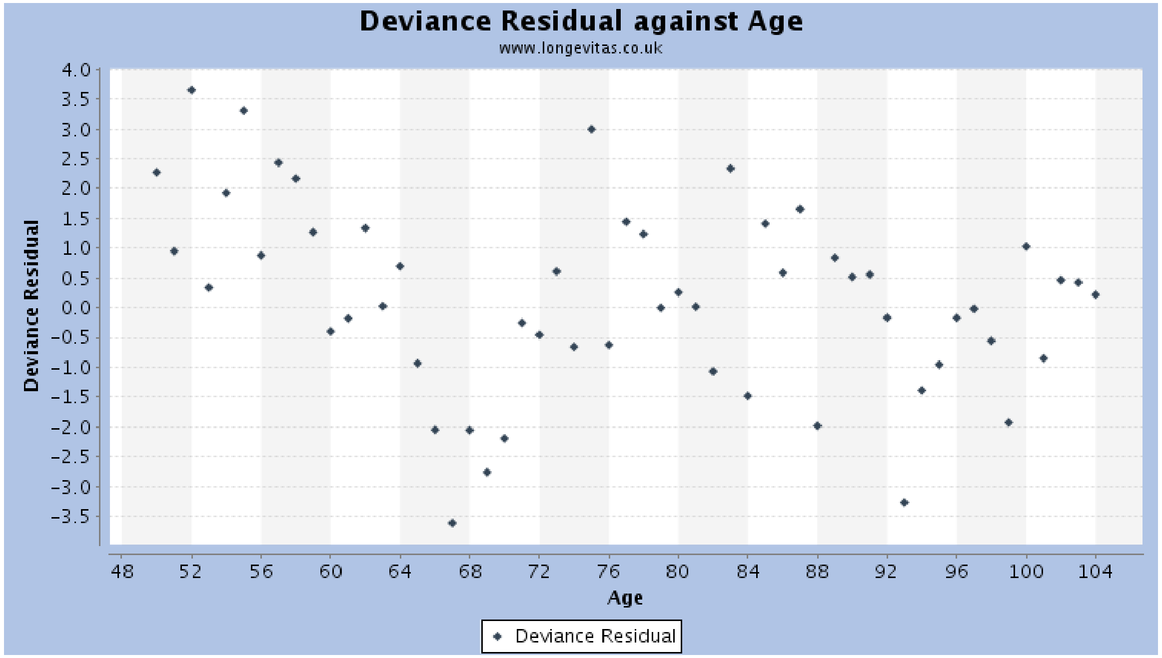
LONGEVITAS

AdRes

Angemessenheit?

Konsistenz mit den Daten

Residuen (nach Alter)



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Residualanalyse

$$r = sign(D - \widehat{D})\sqrt{2[D\ln\left(\frac{D}{\widehat{D}}\right) - (D - \widehat{D})]}$$

Annahme:

Poisson-verteilte Ereignisse D.

Dann gilt:

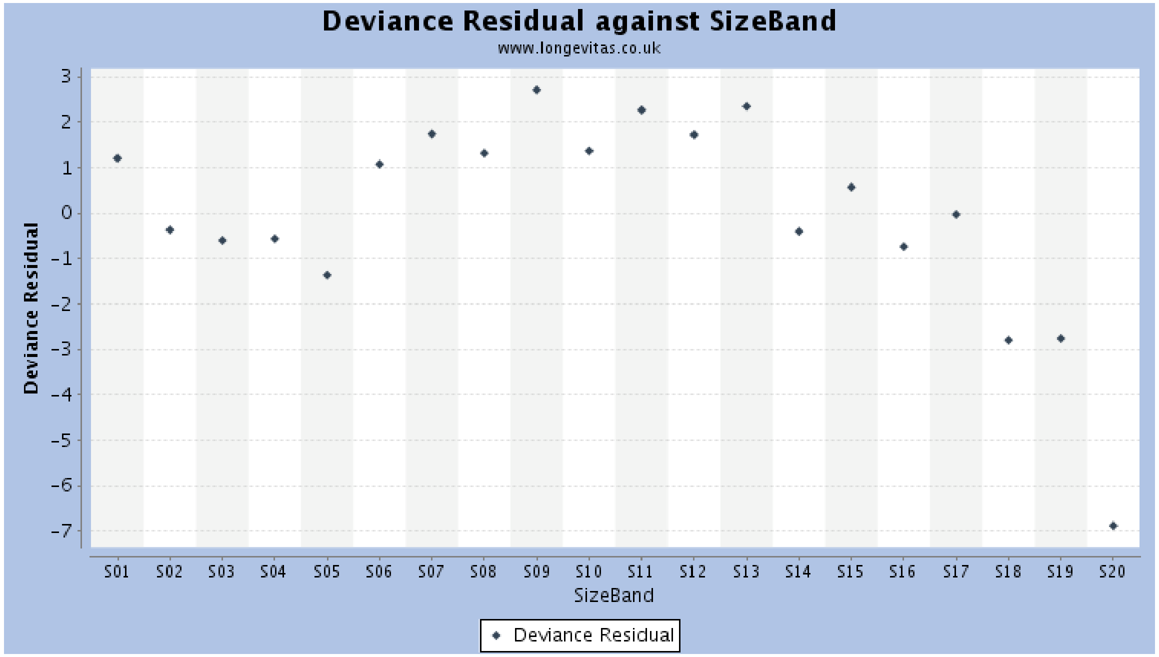
Residuen standard-normalverteilt.

95%-Konfidenz-Intervall:
[-1,96, 1,96]

Angemessenheit?

Konsistenz mit den Daten

Residuen (nach Rentenhöhe)



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Leistungsempfänger aufgeteilt in 20 Bänder nach Rentenhöhe

- Höchste Renten haben niedrigste Sterberaten
- Mittlere Rentenhöhe hat höchste Sterblichkeit
- Teilgruppe mit niedrigsten Renten scheinbar Teilzeitbeschäftigte

Angemessenheit?

Konsistenz mit den Daten

Schlussfolgerungen:

- Residuen noch zu groß
- Nicht-zufällige Strukturen
- Modell „noch nicht fertig“.

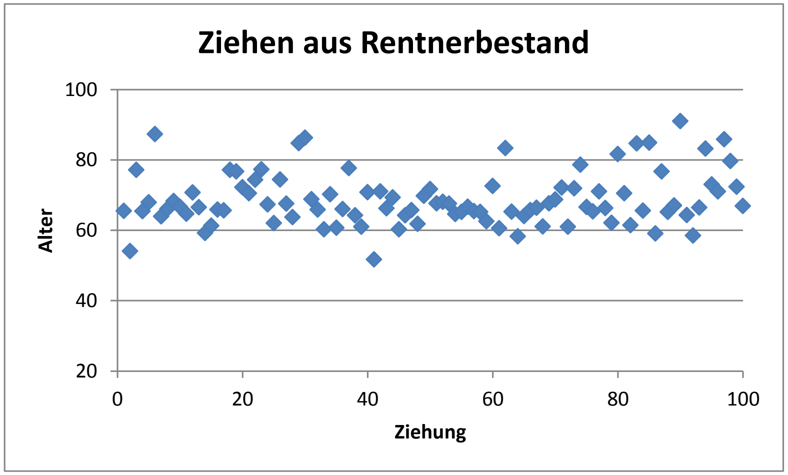
Aber: wie Modellrisiko quantifizieren?

Kraft der Vorhersage

Bootstrapping

Simulation für Modellrisiko

Stochastisches Experiment (N-mal wiederholt)



Berechne erwartete Todesfälle

$$\widehat{D} = \sum_i \hat{\mu}_{x_i} E_{x_i}$$

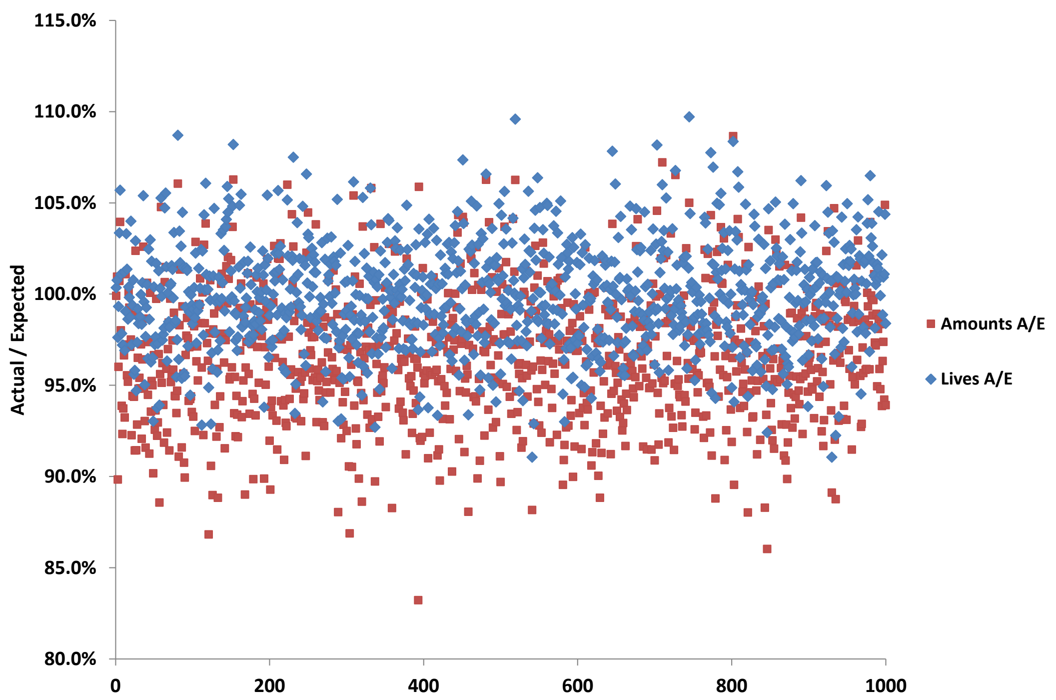
Sterbeintensität $\hat{\mu}_{x_i}$ für jeden gezogenen Rentner i und dessen verlebten Jahre E_{x_i}.

Vergleiche mit den beobachteten Todesfällen D.

Bootstrapping

Simulation für Modellrisiko

Bootstrapping Ergebnisse



Actual
= beobachtete Todesfälle

Expected
= Vorhersage des Modells

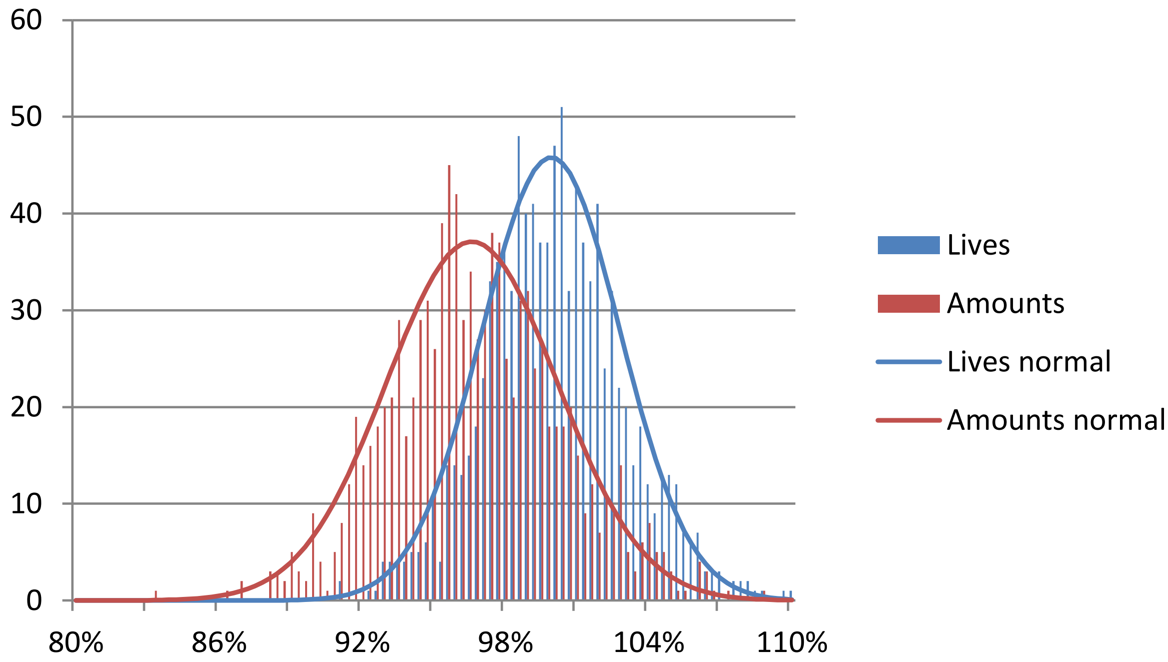
LONGEVITAS

AdRes

Bootstrapping

Simulation für Modellrisiko

Bootstrapping: Actual / Expected



Ungewichtetes Ergebnis:
A/E (lives) = 99.9% ± 2.9%

Summengewichtet:
A/E (amounts)
= 96.6% ± 3.6%

⇒ **Modell unterschätzt finanzielle Auswirkung systematisch um 3.4%**

LONGEVITAS

AdRes

Modelloptimierung

Optimierte Einteilung nach Rentenhöhe

Modellverbesserung: Rentenhöhe

- Leistungsempfänger nach Rentenhöhe sortiert.
- 20 „Buckets“ S01 – S20.
- Gruppiere Buckets nach ähnlicher Sterblichkeit
- Minimiere AIC (Akaike Informations Kriterium):

$$AIC = -2\ell + 2n$$

mit Log-Likelihood ℓ und Parameterzahl n.

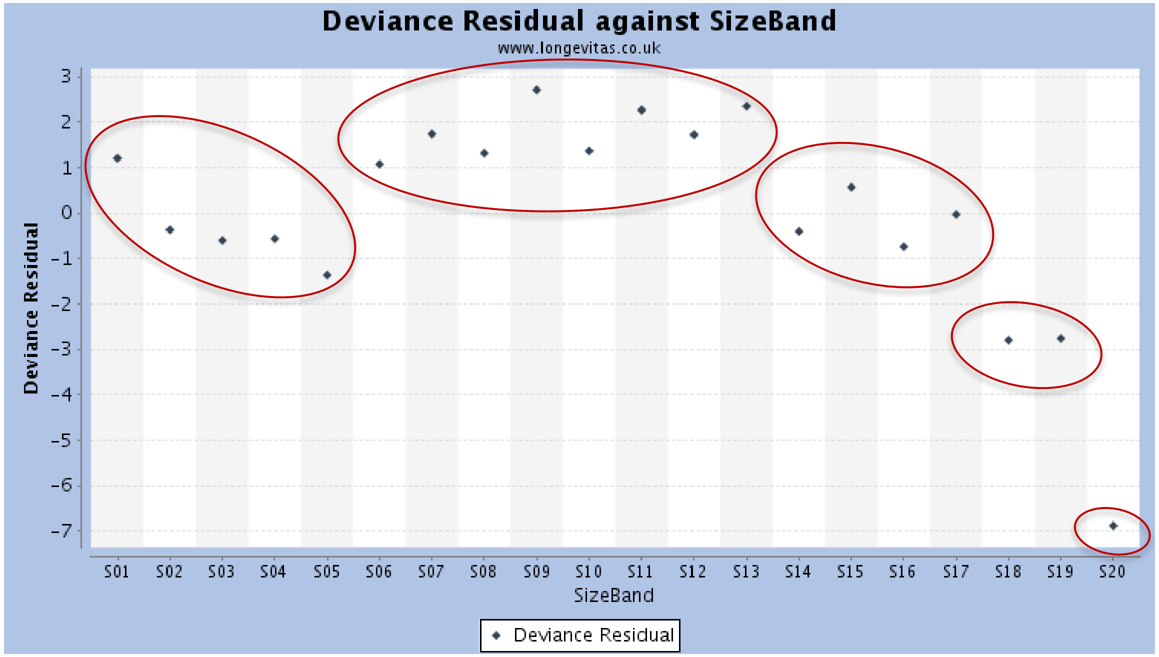
LONGEVITAS

AdRes

Modelloptimierung

Optimierte Einteilung nach Rentenhöhe

Residuen ohne Rentenhöhe im Modell



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Leistungsempfänger aufgeteilt in 20 Bänder nach Rentenhöhe

- Höchste Renten haben niedrigste Sterberaten
- Mittlere Rentenhöhe hat höchste Sterblichkeit
- Teilgruppe mit niedrigsten Renten scheinbar Teilzeitbeschäftigte

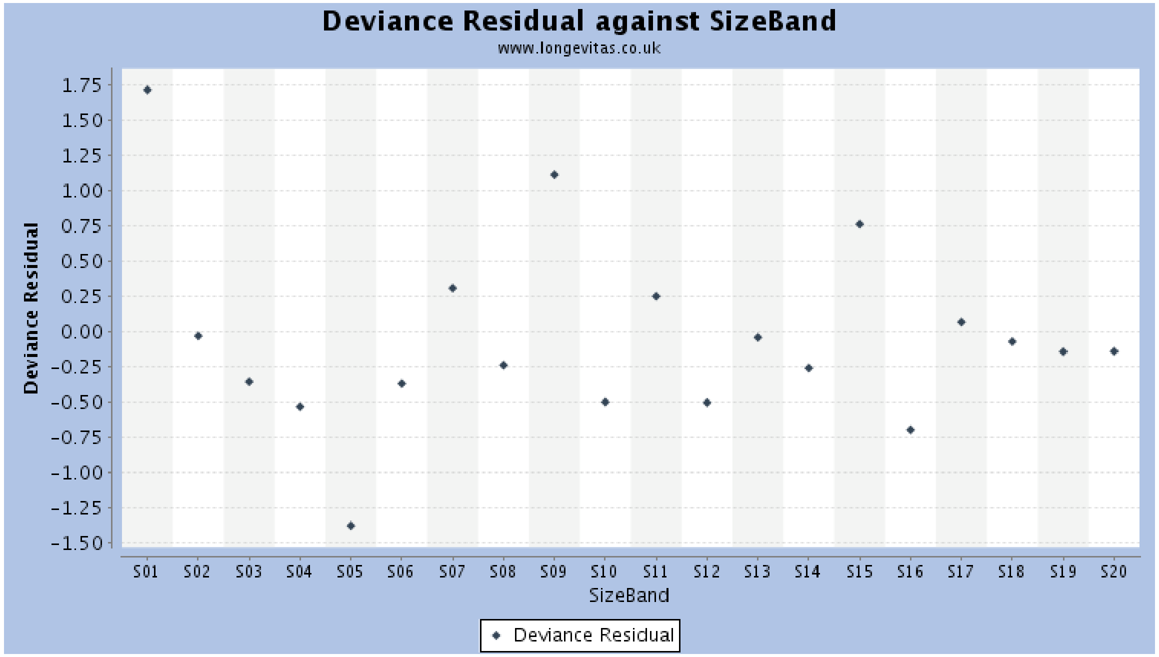
LONGEVITAS

AdRes

Modelloptimierung

Optimierte Einteilung nach Rentenhöhe

Residuen bei Berücksichtigung der Rentenhöhe



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

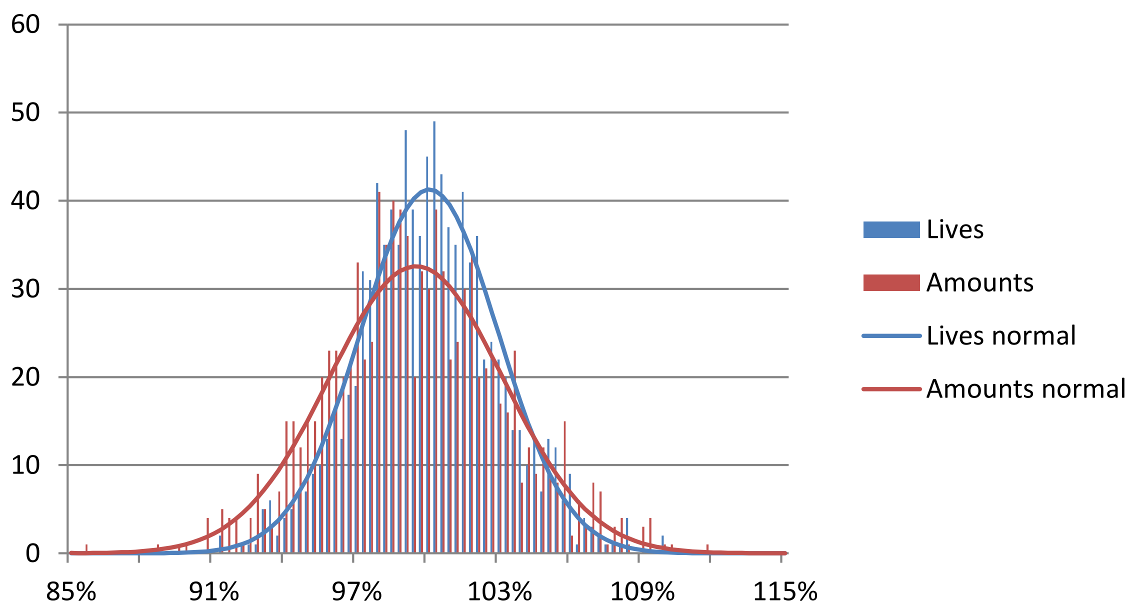
Rentenhöhe in 5 Bändern:

- Strukturen beseitigt
- Keine Ausreißer

Bootstrapping

Simulation für Modellrisiko

Bootstrapping: Actual / Expected



Ungewichtetes Ergebnis:
A/E (lives) = 99.9% ± 2.9%

Summengewichtet:
A/E (amounts)
= 99.3% ± 3.7%

⇒ **Modellrisiko fast beseitigt**

Fallbeispiel

Bestandseigene Tafeln für Teilbestand

Leistungsempfänger einer Zusatzversorgungskasse

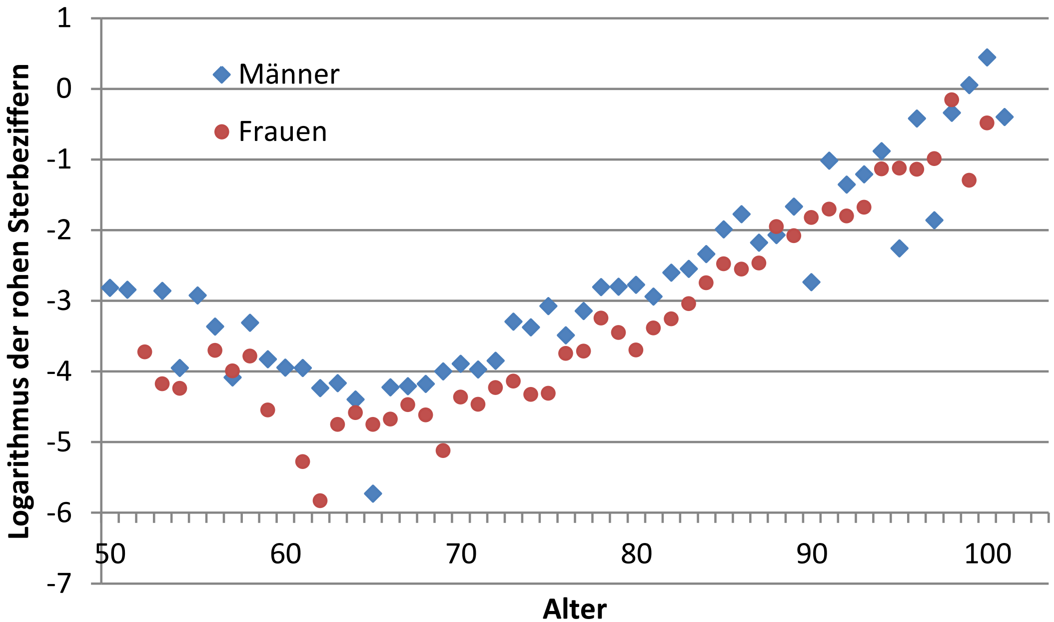
- 12.673 Rentner
- 1.261 beobachtete Todesfälle im Zeitraum 2007-2011
- 44.255 verlebte Jahre (Verweildauer)

Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Fallbeispiel

Bestandseigene Tafeln für Teilbestand

Rohe Sterbeziffern nach Geschlecht



Quelle: Richards, Kaufhold, Rosenbusch (2013)

Bemerkungen:

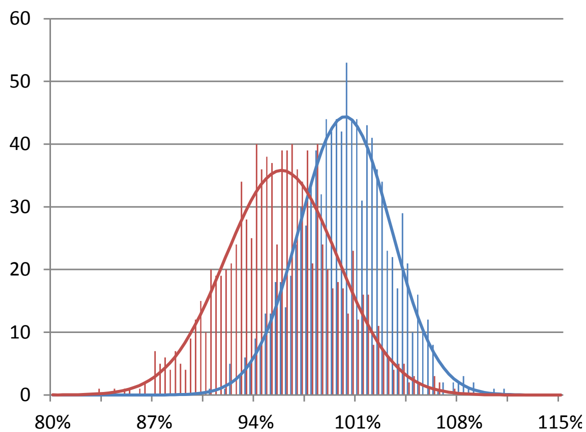
- Generell gleiche Struktur wie Gesamtbestand
- Höhere Volatilität
- Macht eine bestands-spezifische Ausscheide-ordnung Sinn?

Bootstrapping

Simulation für Modellrisiko

Bootstrapping-Vergleich für 3 Modelle

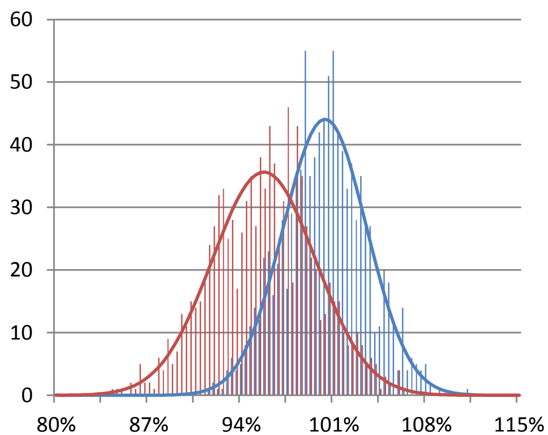
Nur Alter + Geschlecht



A/E (amounts) = 95.6% ± 3.9%

Rentenbarwert $\ddot{a}_x$ *des Bestands*
= €625 Mio ± 15 Mio

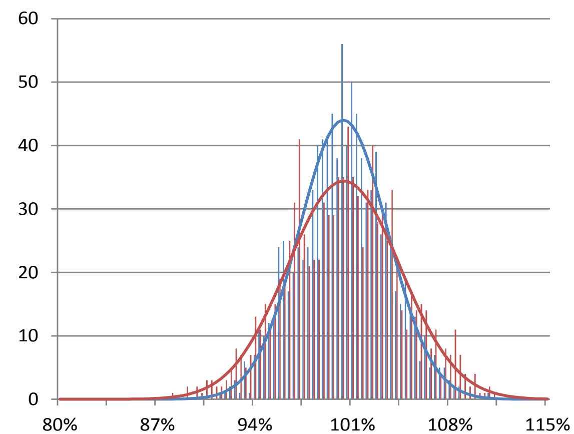
+ Zustand



= 95.5% ± 3.9%

= €658 Mio ± 12 Mio

+ Zustand + Summe



= 100.2% ± 4.1%

= €665 Mio ± 14 Mio

Fazit

Bestandseigene Tafeln empfehlenswert

- Durch die Verwendung der *statistischen Survivalanalyse* konnten wir die Konsistenz der Ausscheideordnung mit den Bestandsdaten überprüfen.
- Anhand des *Bootstrapping-Verfahrens* quantifizieren wir die finanzielle Angemessenheit des Modells.
- Auch der *Schätzfehler* lässt sich berechnen, womit wir insgesamt das *Modellrisiko* für Sterbetafeln als Basistafeln dargestellt haben.
- Ausblick: Quantifizierung des Trend-Risikos.

Literaturhinweise

RICHARDS, S.J. **2012** *A handbook of parametric survival models for actuarial use,* Scandinavian Actuarial Journal, 2012 (**4**), S. 233 ff.

RICHARDS, S.J., KAUFHOLD, K. and ROSENBUSCH, S. **2013** *Creating portfolio-specific mortality tables: a case study,* European Actuarial Journal (**3**), S.295 ff.

KAUFHOLD, K. **2014** *Bestandseigene Sterbetafeln – Moderne Biometrie mit Survivalanalyse,* Der Aktuar 02.2014, S. 64 ff. (www.aktuar.de, interner Bereich)

Kontaktdaten

Kai Kaufhold

Ad Res Advanced Reinsurance Services GmbH

Dr.-Bethune-Str. 10, D-50354 Hürth

Tel. 0152 2886 5458

Email. kai.kaufhold@adreservices.com

URL. www.adreservices.com, www.longevitas.co.uk