



Replicating Portfolios für deutsche Lebensversicherungen: Methodik, Technik und Einsatzmöglichkeiten

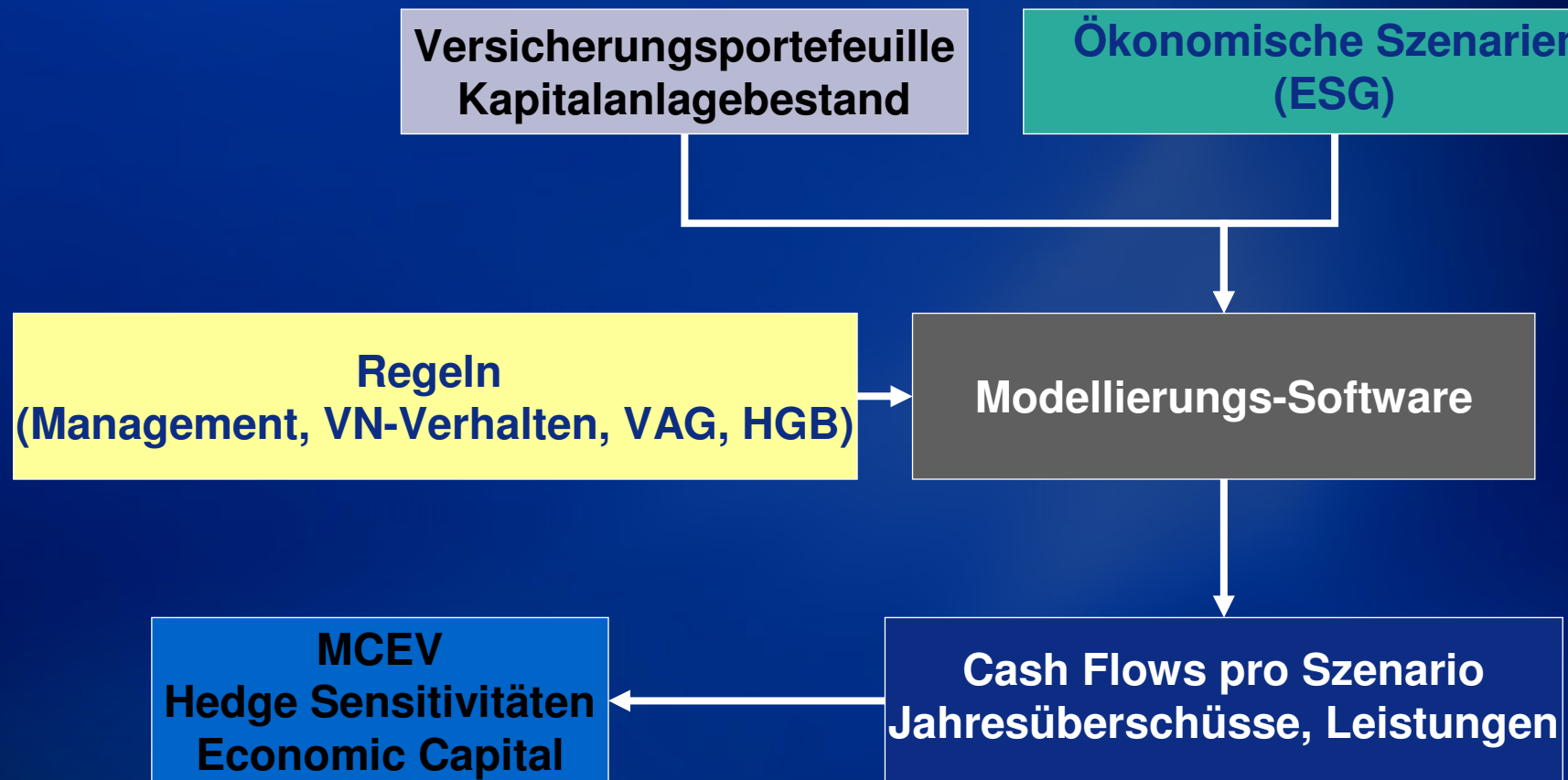
Dr. Thorsten Wagner

Köln, 3. März 2009

Agenda

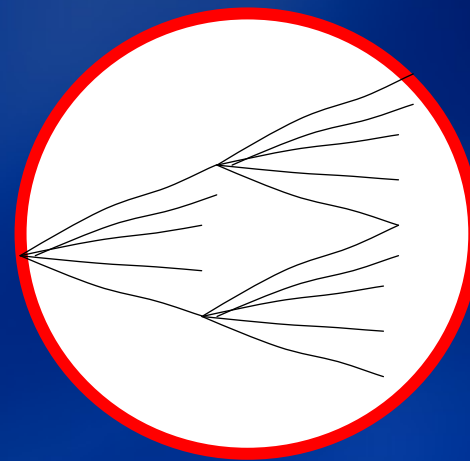
- **Motivation für Replicating Portfolios**
- Mathematischer Hintergrund
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Motivation für Replicating Portfolios



Motivation für Replicating Portfolios

- **Berechnungszeiten sind hoch**
- **Umfang der Berechnungen wächst**
 - MCEV: Sensitivitäten
 - Steuerung über Economic Capital:
Tägliche bis wöchentliche Verfügbarkeit
- **Economic Capital: Lösung des Problems der „Stochastik in der Stochastik“**



Motivation für Replicating Portfolios

- Definition:

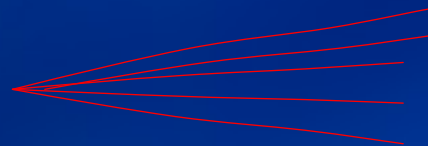
„Ein Replicating Portfolio ist eine Auswahl an Kapitalmarktinstrumenten, deren Cash Flows (oder Barwerte) sich in Abhängigkeit vom Kapitalmarkt möglichst ähnlich verhalten wie die entsprechenden Cash Flows (oder Barwerte), die aus dem kompletten Unternehmensmodell resultieren.“

- Kapitalmarkt =>

zu replizierende CF



CF aus dem RP



„Residuum“



Agenda

- Motivation für Replicating Portfolios
- **Mathematischer Hintergrund**
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Mathematischer Hintergrund

- Lösung des folgenden Problems:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \text{ unter der Nebenbedingung } Px = c$$

- Jede Zeile steht für eine Version eines Cash Flow oder eines Barwertes.
- A : Jede Spalte steht für ein Kapitalanlageinstrument.
- x : Gewichte für diese Kapitalanlageinstrumente.
- b : Tatsächliche Ergebnisse des Unternehmensmodells in Abhängigkeit (Zeilen) der entsprechenden Version eines Cash Flow oder Barwertes.

Mathematischer Hintergrund

- Lösung des folgenden Problems:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \text{ unter der Nebenbedingung } Px = c$$

- Die Nebenbedingung soll sicher stellen, dass Cash Flows oder Barwerte in mindestens einem (wichtigen) Szenario (z.B. „certainty equivalent“) exakt getroffen werden.
- P bzw. c sind analog zu A bzw. b für diesen Basisfall.
- Dimension von $c \ll$ Dimension von b

Mathematischer Hintergrund

- Lösungsansatz über Lagrange Multiplikatoren führt zu

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2A^T Ax - 2A^T b + 2P^T y \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = Px - c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A^T A & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}}_{=:G} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:z} = \underbrace{\begin{pmatrix} A^T b \\ c \end{pmatrix}}_{=:d}$$

- Lösung über Householder-Transformationen unter Beachtung numerischer Stabilität

Agenda

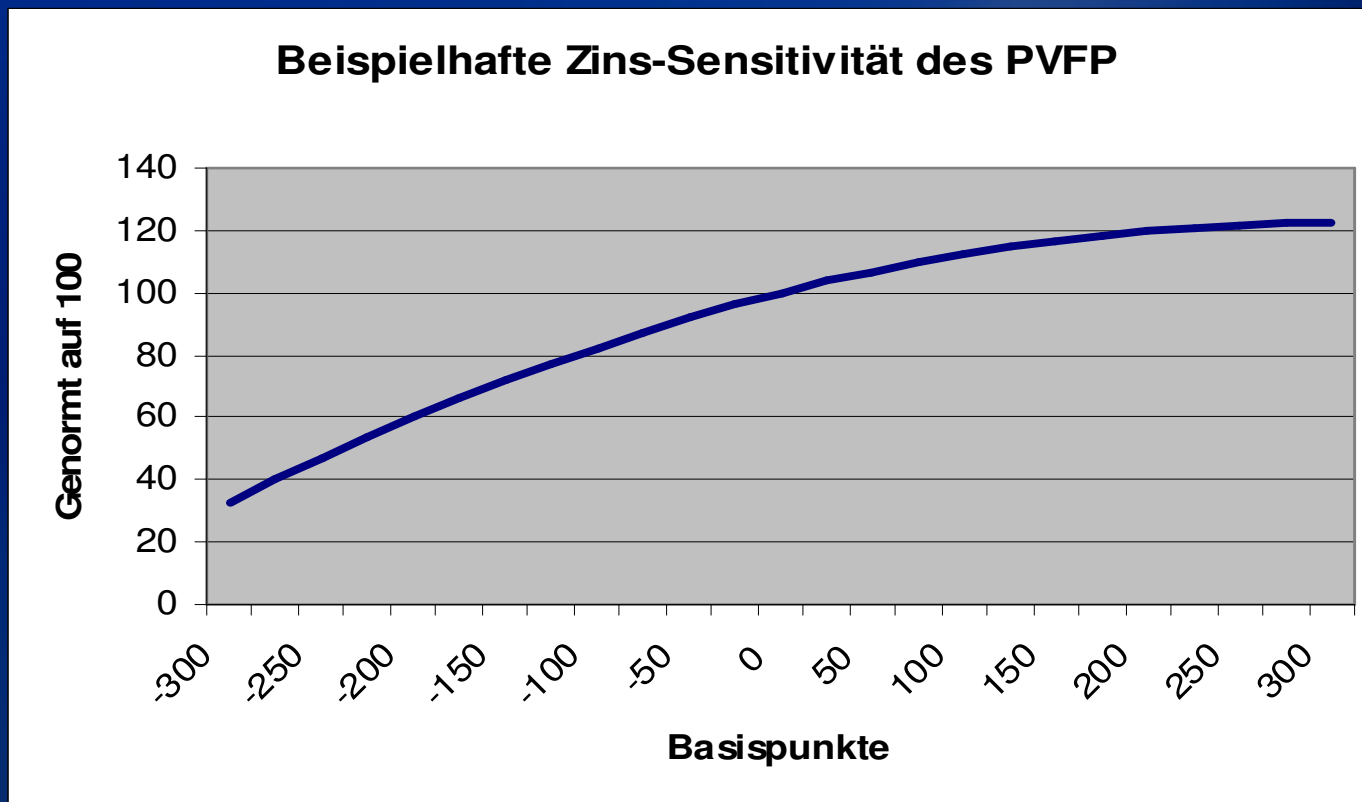
- Motivation für Replicating Portfolios
- Mathematischer Hintergrund
- **Wahlmöglichkeiten für den Anwender**
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Wahlmöglichkeiten für den Anwender

- **Art und Anzahl der Cash Flows oder Barwerte, bezüglich derer die Optimierung vorgenommen werden soll (Zeilen des ursprünglichen Problems)**
 - Abhängig von der Zielsetzung (z.B. Sensitivitäten für den MCEV versus Steuerungszwecke)
- **Nebenbedingungen**
- **Auswahl der für die Optimierung zur Verfügung stehenden Kapitalmarktinstrumente**
 - Abhängig von der Struktur des Portefeuilles – nicht nur von dem Policenbestand, auch vom Kapitalanlagebestand

Wahlmöglichkeiten für den Anwender

- Welche Kapitalanlageinstrumente werden bei konkaven Zinssensitivitäten im PVFP (= Present Value of Future Profits) diese annähernd reflektieren?



Wahlmöglichkeiten für den Anwender

- **Konkavität im Niedrigzins-Bereich:
Short Position von Receiver Swaptions**
- **Konkavität im Hochzins-Bereich:
Short Position von Payer Swaptions**
- **Weitere Analysen bzgl. Aktien, Volatilität etc. sinnvoll**
- **Bisher typische Kapitalanlageinstrumente für RP:**
 - Bonds
 - Swaps
 - Receiver und Payer Swaptions
 - Aktien und Aktien-Optionen

Agenda

- Motivation für Replicating Portfolios
- Mathematischer Hintergrund
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- **Ein Anwendungsbeispiel**
- Implikationen und Begrenzungen

Ein Anwendungsbeispiel

- **Ausgangspunkt: vereinfachtes Unternehmensmodell**
- **Kapitalanlagebestand und Neuanlage:**
 - Aktien (8%) und
 - Bonds unterschiedlicher Laufzeiten (1 – 8)
- **Portefeuille an Versicherungsverträgen:**
 - gem. Kapitalversicherungen mit Rechnungszins 3,25%
 - Restlaufzeiten 1 – 50 Jahre
 - Zuführung zur RfB = $\max[0; 90\% * \text{Rohüberschuss}]$
 - Überschuss abhängig von freier RfB
- **Kapitalmarktannahmen aus 3. Quartal 2008**

Ein Anwendungsbeispiel

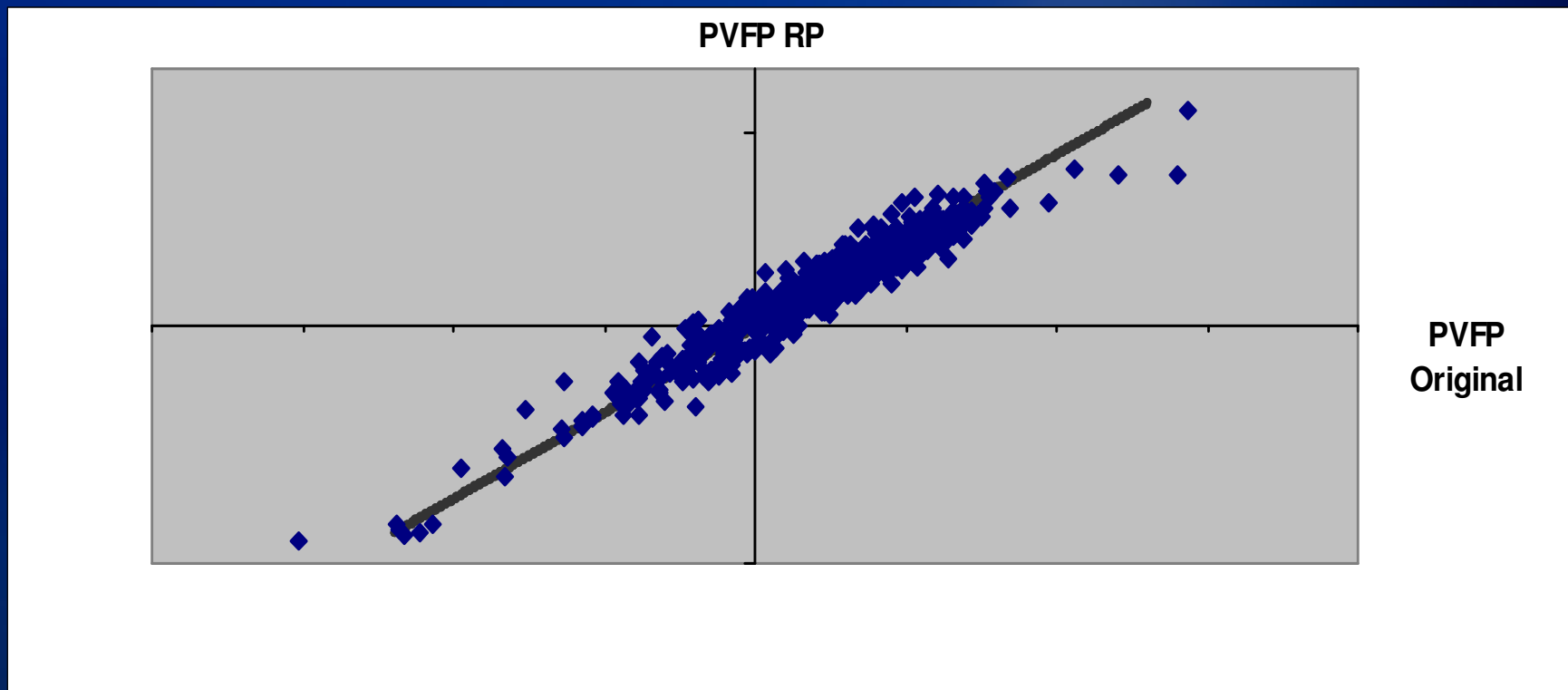
- **Zielsetzung: Bestimmung von PVFP Sensitivitäten**
- **Optimierung in Bezug auf:**
 - ca. 500 stochastische Pfade: PVFP
 - Sensitivitäten des „certainty equivalent“ Pfades:
 - PVFP
 - Cash Flows
- **Nebenbedingung:**
Exakte Übereinstimmung im „certainty equivalent“ Pfad bzgl. Barwert und Cash Flows

Ein Anwendungsbeispiel

- **Zielsetzung: Bestimmung von PVFP Sensitivitäten**
- **Auswahl an Kapitalmarktinstrumenten:**
 - Zerobonds und Swaps (Restlaufzeiten 1 – 50)
 - Variation von Equity Puts
 - Receiver Swaptions mit Tenor 5 und 15 Jahren, Optionszeitpunkte in 1 – 26 Jahren, Strike zwischen 4,17% und 4,91%
 - Payer Swaptions mit Tenor 5 und 25 Jahren, Optionszeitpunkte in 1 – 26 Jahren, Strike zwischen 4,17% und 4,91%

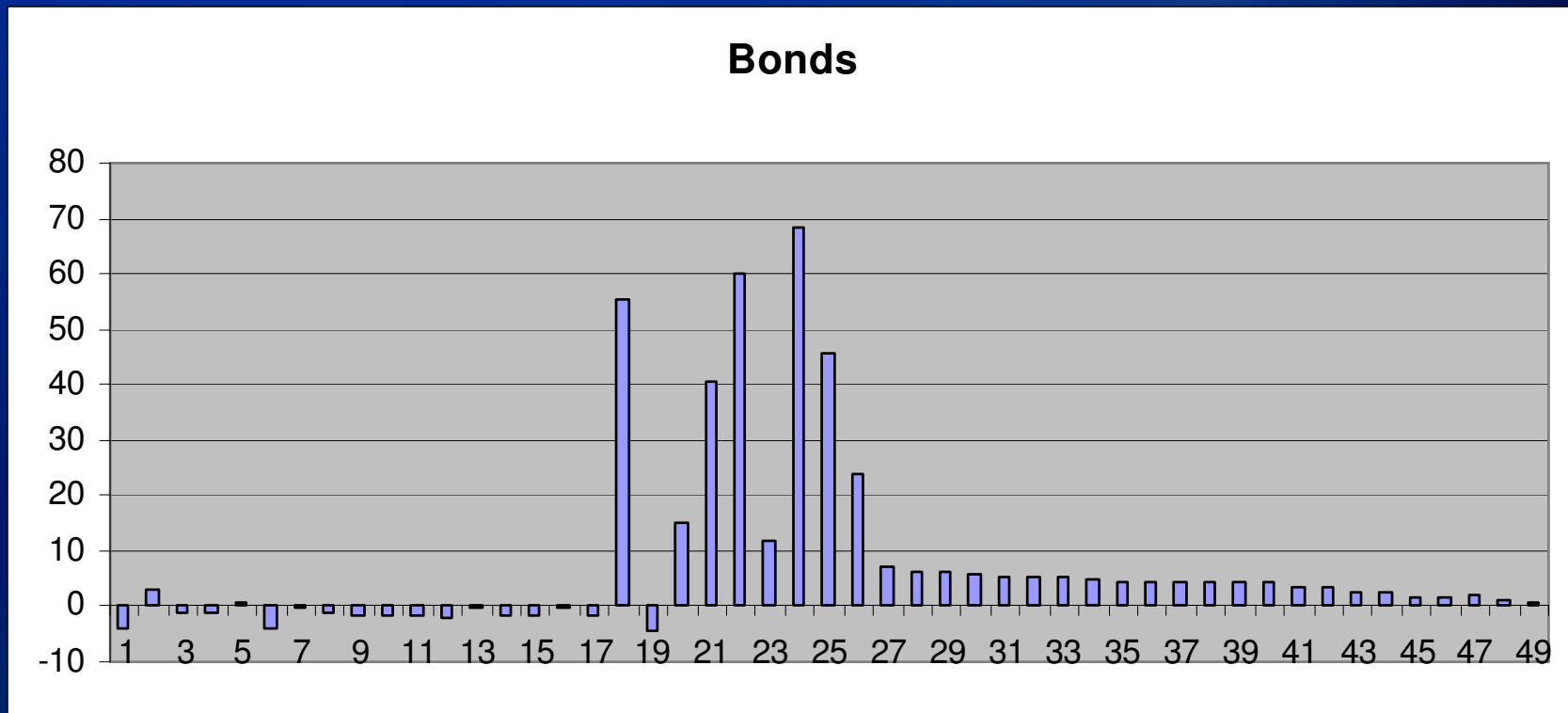
Ein Anwendungsbeispiel

- Güte des Fit durch das Replicating Portfolio mit
 R^2 -Wert = 94,05 %; Abweichung im PVFP = + 0,44 %



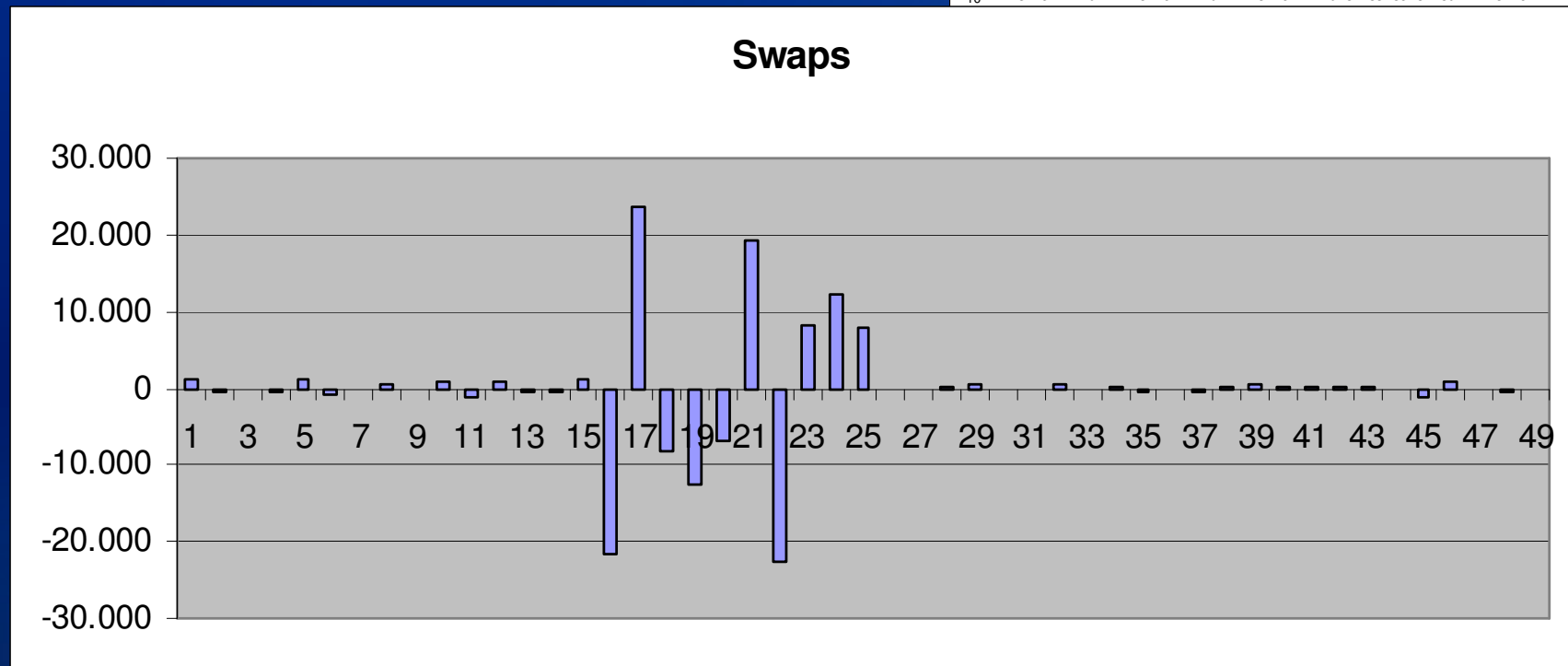
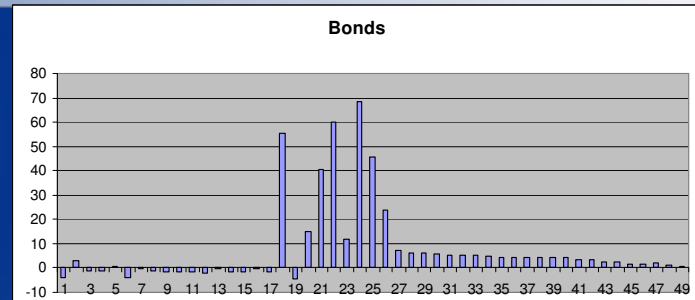
Ein Anwendungsbeispiel

- Aufteilung der Gewichte:



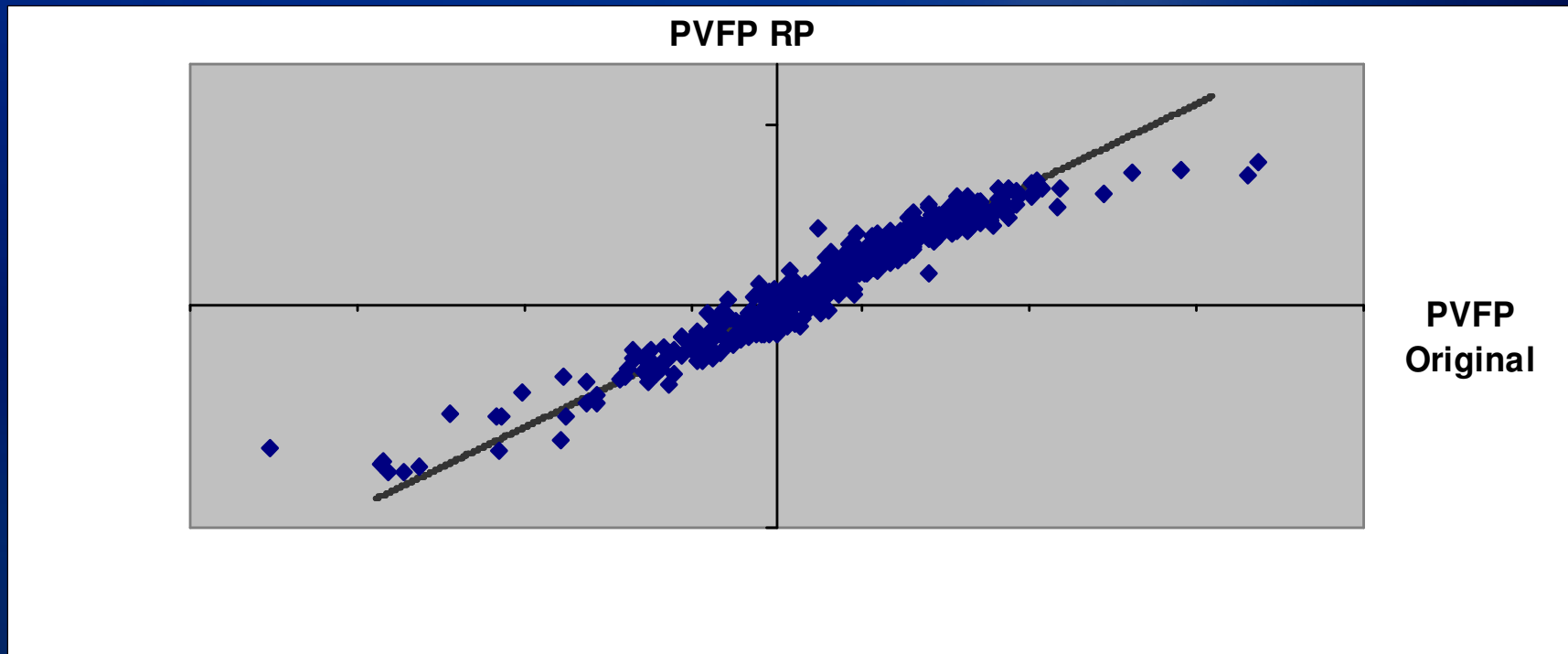
Ein Anwendungsbeispiel

- Aufteilung der Gewichte:



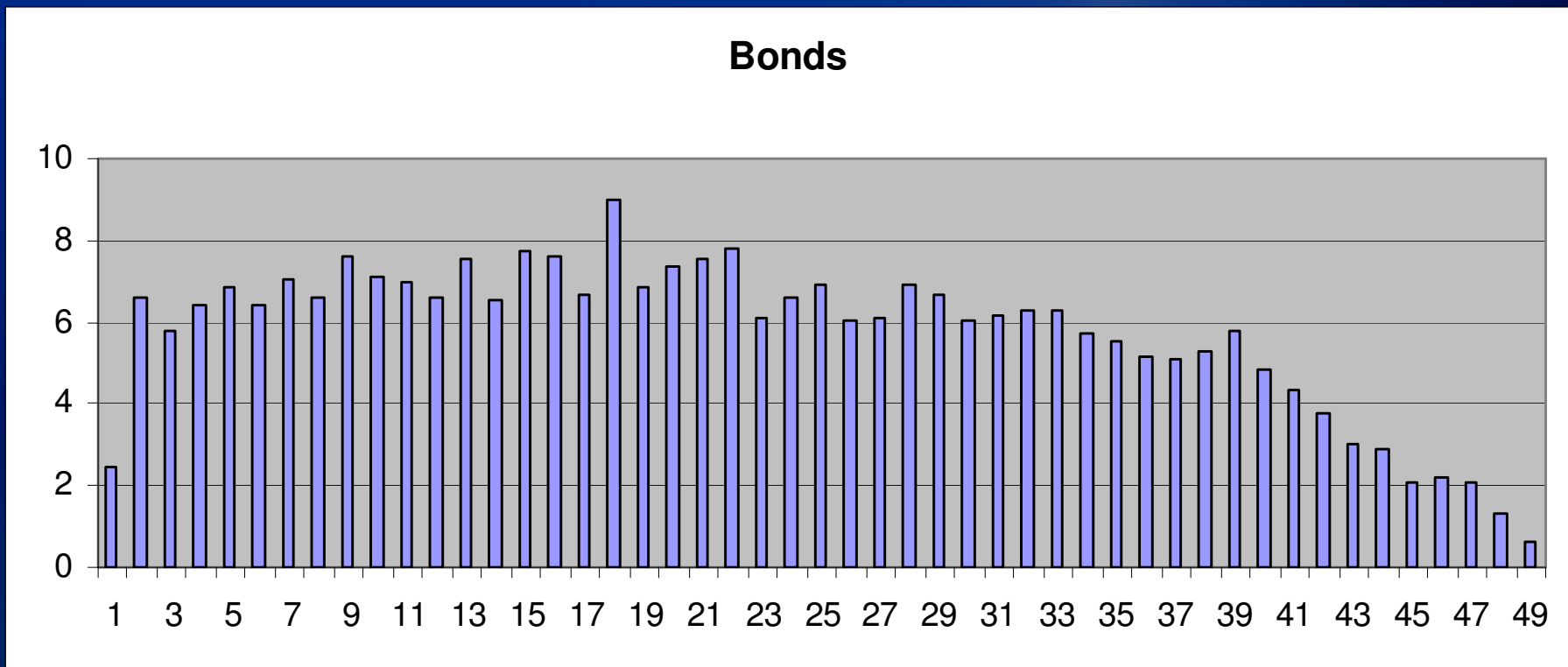
Ein Anwendungsbeispiel

- Rep. Portfolio ohne Payer Swaptions (sonst gleich)
- Güte des Fit durch das Replicating Portfolio mit
 $R^2\text{-Wert} = 93,32\%$; Abweichung im PVFP = $+0,75\%$



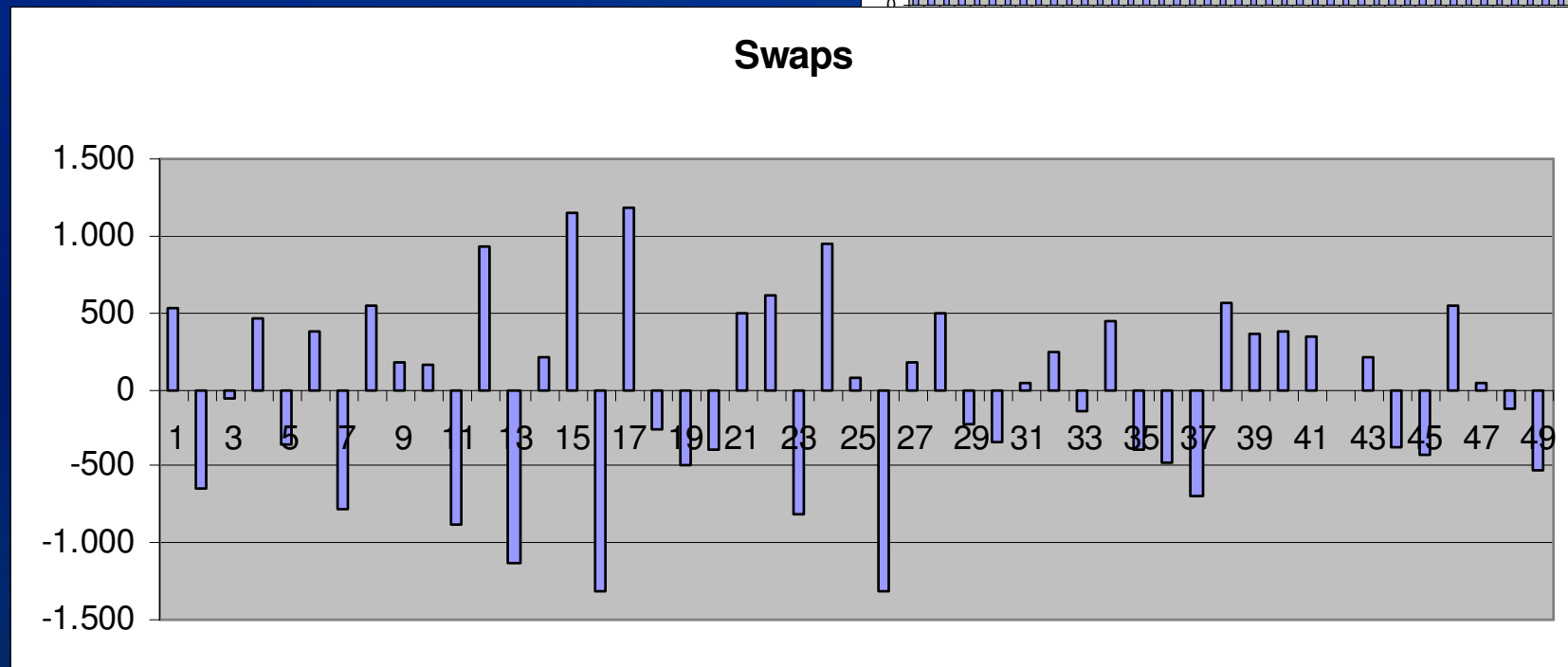
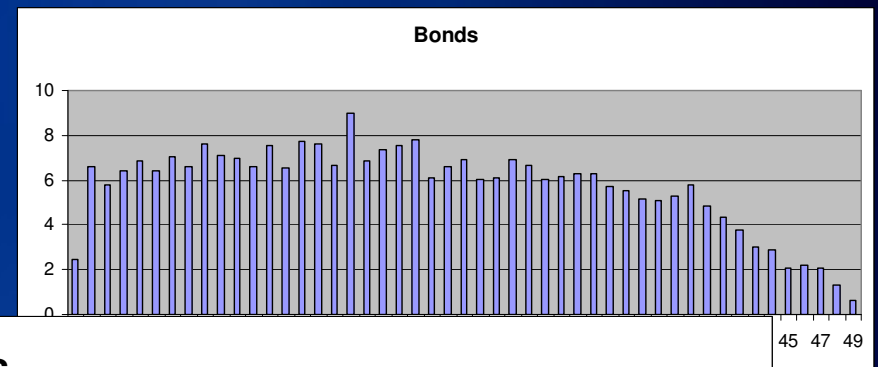
Ein Anwendungsbeispiel

- Aufteilung der Gewichte:



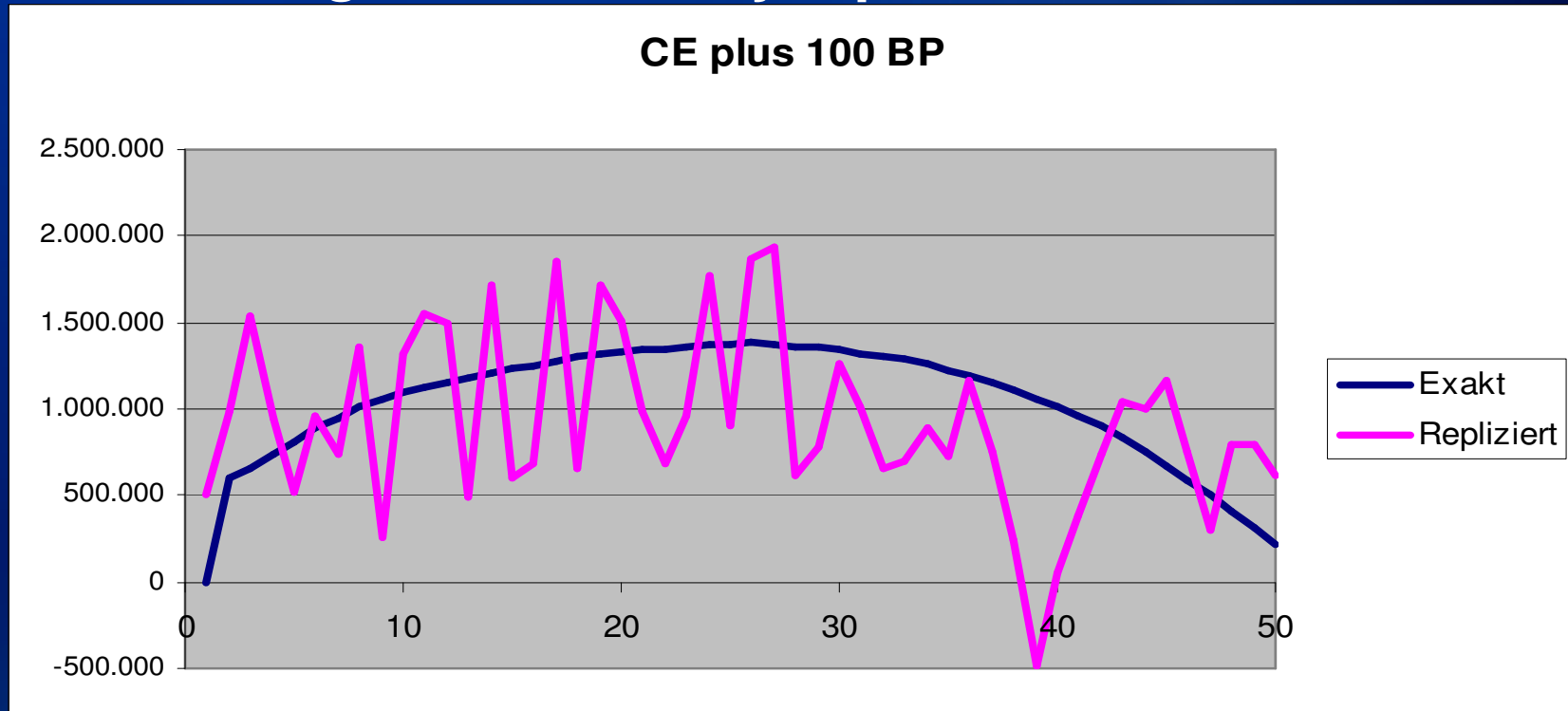
Ein Anwendungsbeispiel

- Aufteilung der Gewichte:



Ein Anwendungsbeispiel

- Auswertung des „certainty equivalent“ + 100 BP:



- Das Replicating Portfolio überschätzt den „certainty equivalent“ PVFP der Sensitivität + 100 BP um 5,23 %.

Ein Anwendungsbeispiel

Was wurde falsch gemacht?

- Cash Flows der „certainty equivalent“ Sensitivitäten innerhalb der Optimierung werden „nicht beachtet“.
- Die PVFP der „certainty equivalent“ Sensitivitäten haben innerhalb der Optimierung ein viel zu geringes Gewicht im Vergleich zu den stochastischen Pfaden.
- Der stochastische PVFP (als Mittelwert) sollte ebenso in der Nebenbedingung erfasst werden.
- Die Art und Anzahl der stochastischen Pfade für die Optimierung ist unzureichend.
- Es wurde nicht die Wirkungsweise des Replicating Portfolio an einem alternativen Szenarien-Set getestet.

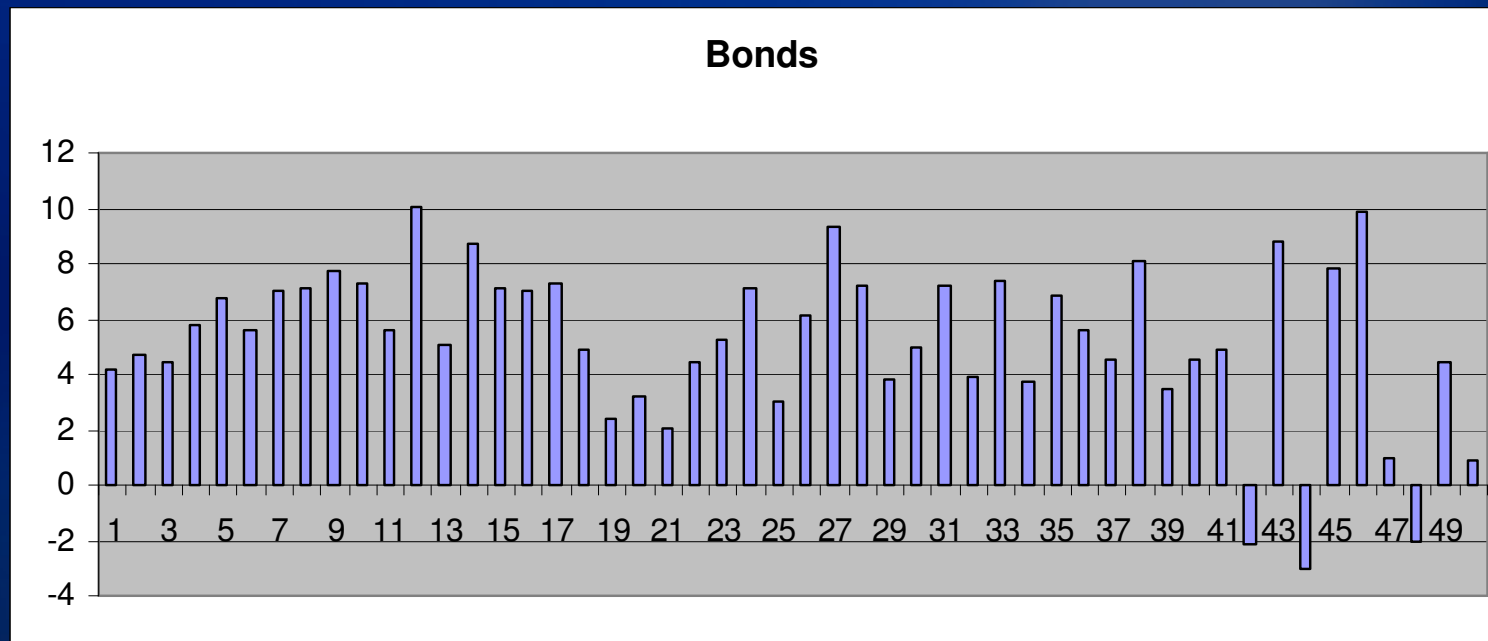
Ein Anwendungsbeispiel

- **Neue Optimierung in Bezug auf:**
 - ca. 500 stochastische Pfade: PVFP
- **Neue Nebenbedingungen (exakte Übereinstimmungen):**
 - Im „certainty equivalent“ Pfad: Barwert und Cash Flows
 - PVFP der „CE $\pm$ 75 BP“ und „CE $\pm$ 150 BP“
 - Stochastischer PVFP (Mittelwert über die Pfade)
- **Kapitalanlageinstrumente unverändert**

Ein Anwendungsbeispiel

Ergebnis:

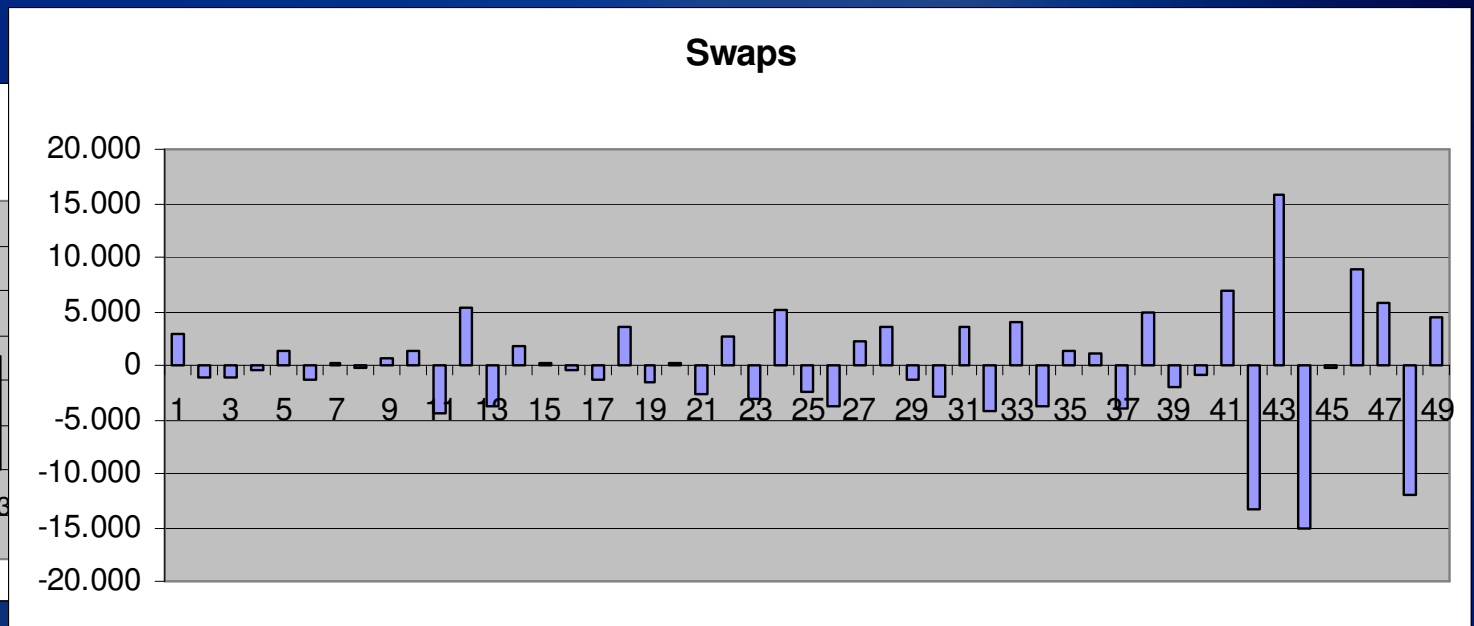
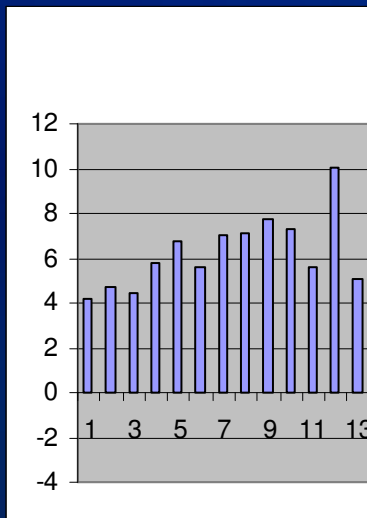
- Exakte Replikation des CE- und stochastischen PVFP
- Fehler beim PVFP des „CE + 100 BP“ : + 0,78%
- Gewichte:



Ein Anwendungsbeispiel

Ergebnis:

- Exakte Replikation des CE- und stochastischen PVFP
- Fehler beim PVFP des „CE + 100 BP“ : + 0,78%
- Gewichte:



Agenda

- Motivation für Replicating Portfolios
- Mathematischer Hintergrund
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Implikationen und Begrenzungen

- Die Güte eines Replicating Portfolios muss bezüglich der Zielsetzung festgelegt werden
- Auswahl der Optionsmöglichkeiten entscheiden über die Güte eines Replicating Portfolios

„Auch an einem super Replicating Portfolio kann man mitunter noch einiges optimieren“



Kontakt:

KPMG Aktiengesellschaft
Wirtschaftsprüfungsgesellschaft

Dr. Thorsten Wagner
T +49 221 2073 5380
thorstenwagner@kpmg.com

www.kpmg.de

Die enthaltenen Informationen sind allgemeiner Natur und nicht auf die spezielle Situation einer Einzelperson oder einer juristischen Person ausgerichtet. Obwohl wir uns bemühen, zuverlässige und aktuelle Informationen zu liefern, können wir nicht garantieren, dass diese Informationen so zutreffend sind wie zum Zeitpunkt ihres Eingangs oder dass sie auch in Zukunft so zutreffend sein werden. Niemand sollte auf Grund dieser Informationen handeln ohne geeigneten fachlichen Rat und ohne gründliche Analyse der betreffenden Situation.

© 2008 KPMG Deutsche Treuhand-Gesellschaft Aktiengesellschaft Wirtschaftsprüfungsgesellschaft, eine Konzerngesellschaft der KPMG Europe LLP und Mitglied des KPMG-Netzwerks unabhängiger Mitgliedsfirmen, die KPMG International, einer Genossenschaft schweizerischen Rechts, angeschlossen sind. Alle Rechte vorbehalten. KPMG und das KPMG-Logo sind eingetragene Markenzeichen von KPMG International.